解析から線形代数へ

吉 井 洋 二・芦 野 隆 一*

From analysis to linear algebra

Yoji Yoshii and Ryuichi Ashino*

（2011年11月25日受理）

To better understand abstract vector spaces, one can use some common concepts in analysis, for example, differentials, integrations or Fourier transforms. We explain such methods with concrete examples.

Keywords : eigenfunction, heat equation, Fourier transform, unitary transformation

1　はじめに

本校では２年時に線形代数の初歩を教え，その続きは専攻科１年となる。専攻科にもなると，数学の知識，特に解析系は大学２年レベルになっている。このレベルの学生に線形代数を教える際，微分方程式やフーリエ変換を例に使うことの有効性を知った。と同時に，この手法は高専に限らず，一般の大学でも採用していくべきと感じている。ここではそのような例をいくか紹介する。内容は，大きく分けて以下の４点である。

- 固有値の導入に微分方程式を使う。
- 熱伝導の方程式を固有関数を用いて解く。
- フーリエ変換の固有関数は何か？
- フーリエ変換はユニタリー変換である。

2　固有値の導入

まず，ベクトル空間を定義した場合，その抽象的定義より，具体例が大事だと思うのは多くの先生が感じることだと思う。その際，学生にとっては，数ベクトル空間$\mathbb{R}^n$より，

$V=\{f(t)\,|\,f(t)$ は何回でも微分可能$\}$

の方が以外と身近なのである。そしてVの線形変換の例として，微分作用素（微分演算子[*1]ともいう）

$$D:=\frac{d}{dt}$$

を紹介するのもごく自然であり，どんな線形代数の教科書にも書いてある[*2]。

さて，このDの固有値はなんだろう？

答はすべての実数である。実際，任意の実数aに対して，$D(e^{at})=ae^{at}$だからである。そして固有ベクトルは関数e^{at}である。

では２階微分

$$D^2:=\frac{d^2}{dt^2}$$

の固有値，そして固有関数はなんだろう？

この場合も，e^{at}, e^{-at}, $\cos at$, $\sin at$, 1, tが固有ベクトルになることが微分の経験からわかる。実際，

$D^2(e^{at})=a^2\,e^{at}$だから固有値はa^2,
$D^2(e^{-at})=a^2\,e^{-at}$だから固有値は$a^2$,
$D^2(\cos at)=-a^2\cos at$だから固有値は$-a^2$,
$D^2(\sin at)=-a^2\sin at$だから固有値は$-a^2$,
$D^2(1)=0\times 1$だから固有値は0,
$D^2(t)=0\times t$だから固有値は0

である。固有値$\lambda\in\mathbb{R}$に対する固有関数を求めるには，微分方程式

[*1]［長瀬］，52ページを参照.

[*2] 線形代数で学ぶ行列の固有値や対角化などの考え方あるいはベクトル空間の概念などが，微分方程式とどのように関係しているかについて，微分方程式の立場から解説した教科書もある．例えば，［長瀬］を参照.

* 大阪教育大学

$$y''-\lambda y=0 \qquad (1)$$

を解けばよい。y_1, y_2 を（1）の解とすると，y_1+y_2 も解であり，y が（1）の解であれば，任意の定数 c に対して，cy も解となるので，（1）の解全体のなす集合（解空間）はベクトル空間になることがわかる。さらに，（1）の解全体のなすベクトル空間は2次元であり，その基底となる関数は，例えば

$$e^{\sqrt{\lambda}t},\ e^{-\sqrt{\lambda}t}, \qquad \lambda>0,$$

$$\cos\sqrt{-\lambda}t,\ \sin\sqrt{-\lambda}t, \qquad \lambda<0,$$

$$1,\ t, \qquad \lambda=0$$

である[*3]。このように，例えば，微分方程式

$$y''-2y'-3y=0$$

を解くことは，線形変換 D^2-2D の固有値3の固有空間を求めることに他ならない，ということを強調しておく。これは，微分方程式の復習と，線形変換，固有値，固有ベクトル等の新概念把握とで，一石二鳥である。また，多項式関数全体がなす部分空間上での D の固有空間は何か，等々を考えさせることは，固有値等の概念把握にとても有効である。

3　熱伝導の方程式

熱伝導の方程式と言えば，変数分離法[*4]で解くのが普通である。そこで使う，分数の形にして両辺を定数と置くテクニックには，違和感を感じる学生が多い。ここでは，微分方程式の固有関数という概念を全面に出して解く方法を紹介したい。次のような熱伝導の方程式の初期値境界値問題を考えよう。関数 $\varphi(x)$ は区間［0, 1］で C^∞ 級の関数[*5]で

$$\varphi(0)=\varphi(1)=0$$

となるものとする。このとき，

$$t>0 \text{ かつ } 0<x<1$$

に対して，

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \qquad (2)$$

を満たし，c は正の定数で，境界条件：

$$f(0,t)=f(1,t)=0 \qquad (3)$$

と初期条件：

$$\lim_{t\to+0} f(x,t)=\varphi(x) \qquad (4)$$

を満たす2変数関数 $f(x,t)$ を求めることを考える。（工学系の本では $\lim_{t\to+0}$ などは付けず，単に $f(x,0)$ とする方が普通である。即ち，大胆に $f(x,0)=\varphi(x)$ と書けば，このあと脚注等に書く，$\lim_{t\to+0}$ と $\Sigma_{n=1}^{\infty}$ や $\int_0^\infty$ との交換等，細かい議論は「代入」という言葉でごまかすことができる。だが，厳密にはかなり難しい数学的議論が必要となるので，それを少しでも知ってもらうため，敢えて $\lim_{t\to+0}$ を付けた。）

物理的には，区間［0, 1］の両端での温度を固定した長さ1の針金について，初期の熱分布 $\varphi(x)$ が与えられたときの，時刻 t での熱分布 $f(x,t)$ を調べる問題ということになる。

まず，議論を進める上で，固有値と言えば，定数であると定める（変数を含まない）。そこで，$\dfrac{\partial}{\partial t}$ の固有関数として，e^{bt}（b は固有値）をとる。

次に，$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ の固有関数はいろいろある。例えば，e^{ax}, $\cos ax$, $\sin ax$ などだが，このうち境界条件（3）を満たすものとして，$\sin n\pi x$ をとる（固有値は $-n^2\pi^2$）。但し n は任意の整数とする。ここで，$b=-cn^2\pi^2$ を満たせば，それぞれの固有関数を掛けた関数

$$e^{-cn^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

は｛(2), (3)｝の解であることがわかる。（とにかく自明でない解を求めることを目的とした！）ところが，n は任意の整数なので，実は解が無限に見つかったわけである。そこで，微分方程式が線形であることから，これらの無限和

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-cn^2\pi^2 t}\sin n\pi x \qquad (5)$$

も｛(2), (3)｝の解となる。（$n>0$ とすれば，

$$\begin{aligned} &C_{-n}\, e^{-c(-n)^2\pi^2 t}\sin(-n)\pi x \\ &=-C_{-n}\, e^{-cn^2\pi^2 t}\sin n\pi x \end{aligned}$$

だから，C_n-C_{-n} を新たに C_n と置くことで，n が負の場合は不要となる。）但し，数列 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ は何でもよいというわけではなく，$f(x,t)$ が x に関して2回，t に関して1回の項別微分[*6]ができるように，$\Sigma_{n=1}^{\infty}\, n^2|C_n|$

*3［長瀬］，38ページの定理1.2を参照.

*4［長・齋］，70ページを参照.

*5 非負の整数 r に対して，ある区間 I で定義された関数 $f(x)$ が r 回微分可能であり，その r 次導関数 $f^{(r)}(x)$ が連続であるとき，関数 $f(x)$ は I で C^r 級の関数であるといい，$f\in C^r(I)$ と表す．任意の非負の整数 r に対して $f\in C^r(I)$ のとき，関数 $f(x)$ は I で C^∞ 級の関数であるといい，$f\in C^\infty(I)$ と表す.

が収束すると仮定しておく。さらに，$f(x,t)$ が

$$\varphi(x)=\lim_{t\to+0} f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x \tag{6}$$

を満たす*7ようにするためには，数列 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ を初期関数 $\varphi(x)$ のフーリエ正弦級数展開係数にとればよい*8。このようにして求めた $f(x,t)$ が，$\{(2),(3),(4)\}$ の解となる。

ここで述べたかったのは，上の「それぞれの変数の固有関数を求めて掛ける」という方法は，変数分離法より能率的で分かり易いということである。

では，境界条件が

$$f(0,t)=0 \tag{7}$$

だけの場合はどうだろう？

これは半直線 $x>0$，つまり針金が片側に無限に伸びていると見なせる場合*9である。針金の温度がいくらでも大きくなることは物理的にあり得ないので，ある正数 M があって，

$$|f(x,t)|\le M \tag{8}$$

が成り立つことは仮定する。したがって，この場合の初期関数 $\varphi(x)$ は，$\varphi(0)=0$ を満たす有界な C^∞ 級の関数となる。

前と同様，$\dfrac{\partial}{\partial t}$ の固有関数として，e^{bt}（b は固有値）をとる。次に，$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ の固有関数はいろいろあるが，境界条件 (7) を満たすものとして，$\sin ax$ をとる（固有値 $-a^2$）。但し a は任意の正の実数とする。（もちろん負の実数でも問題ないが，前の例と同様，正の場合に吸収できる。）今度は，$b=-ca^2$ を満たせば，それぞれの固有関数を掛けた関数

$$e^{-ca^2t}\sin ax$$

は $\{(2),(7)\}$ の解であることがわかる。もちろん a は任意の正の実数だから，解が無限に見つかったわけである。今度は和を積分

$$f(x,t)=\int_0^\infty C(a)e^{-ca^2t}\sin ax\,da$$

に代えたものも $\{(2),(7)\}$ の解となる。（但し，a の関数 $C(a)$ は何でもよいというわけではなく，$f(x,t)$ が項別微分できるよう，$\int_0^\infty a^2|C(a)|da$ が有限確定となるようにしておく。）そして

$$\varphi(x)=\lim_{t\to+0} f(x,t)=\int_0^\infty C(a)\sin ax\,da \tag{9}$$

より*10，フーリエ正弦逆変換を用いて $C(a)$ を定めるのである。

ところで，条件 (8) は必要*11だったのだろうか？実は，上で固有関数 $\sin ax$ を使ったわけだが，ax も固有関数である。ここで有界条件 (8) を使えば，これを除外できる。また，e^{ax} や e^{-ax} も固有関数だが，これらは境界条件 (7) を満たさないので除外しがちである。ところが，$e^{ax}-e^{-ax}$ あるいは $\sinh ax$ (hyperbolic sine) は (7) を満たす。そこでまた有界条件 (8) を使ってこれも除外するのである。

補足 3.1　もちろんここでの固有関数とは微分方程式 (1) の解のことで，ここで見つけたいのは初期条件 $y(0)=0$ を満たす解である。従って，$\lambda<0$ のとき $A\sin\sqrt{-\lambda}t$，$\lambda=0$ のとき At，そして $\lambda>0$ のとき，$A(e^{\sqrt{\lambda}t}-e^{-\sqrt{\lambda}t})$ となる（A は任意の実数）。最後の $\lambda>0$ の場合は，解空間の基底として，$\cosh\sqrt{\lambda}t$ と $\sinh\sqrt{\lambda}t$ を取ってもよいことを注意しておくとよりはっきりする。

4　フーリエ変換

ここで，フーリエ変換も線形変換であり，その固有関数が何かを考える。まず，ちょっと大雑把な言い方だが，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は，積分可能な関数全体

*6 ［黒田］，230ページの定理7.2を参照.

*7 $(x,t)\in[0,1]\times[0,\infty)$ のとき，

$$|C_n e^{-cn^2\pi^2t}\sin n\pi x|\le|C_n|\le n^2|C_n|$$

が成り立つから，(5) の右辺の級数は $(x,t)\in[0,1]\times[0,\infty)$ で絶対一様収束し，極限 $\lim_{t\to+0}$ と無限和 $n=1$ が交換可能となり，(6) の最後の等号が示せる.

*8 関数 $\varphi(x)$ は区間 $[0,1]$ で C^∞ 級の関数であることから，［高橋 1］，52ページの補題2.14を $\varphi(x)$ に適用すれば，初期関数 $\varphi(x)$ のフーリエ正弦級数展開係数として定めた数列 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|C_n|<+\infty$ を満たすことがわかる.

*9 ［藤・池・犬・高］，45ページ §2.5を参照.

*10 (6) の最後の等号と同様に，$a\ge1$ で

$$|C(a)e^{-ca^2t}\sin ax|\le|C(a)|a^2|C(a)|$$

が成り立つから，ルベーグの収束定理によって，極限 $\lim_{t\to+0}$ と積分の交換が可能となり (9) の最後の等号が示せる．ルベーグの収束定理に関しては，［垣田］，27ページの定理3-5，または［溝畑］，111ページの定理4·3を参照.

*11 ここで扱った熱伝導の方程式の初期値境界値問題の古典解の一意性を最大値原理を用いて示すことができるが，その最大値原理を適用するために必要な前提が条件 (8) である．最大値原理については［藤・池・犬・高］，34ページの定理2.3を参照.

が作るベクトル空間$\mathcal{V}$上の線形変換である。実はこの$\mathcal{V}$をもっとはっきりさせるには，かなりの数学的素養が必要であり，それ故，フーリエ変換と線形代数の結びつきは，関数解析を学んで初めてわかるという仕組みになっている。ここでは敢えて$\mathcal{V}$の厳密な定義は気にしないことにする。（例えば，単に関数が積分可能では不十分で，その関数を二乗しても積分可能である必要がある。）

さて，$\mathcal{V}$の元$f(x)$に関して，フーリエ変換$\mathcal{F}$を

$$\mathcal{F}[f(x)]:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-isx}dx$$

で定義する[*12]（定数$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$を付けない流儀もある[*13]）。ここで注意したいのは，$\mathcal{F}[f(x)]$はsの関数だが，変数の文字はなんでよいので，これも$\mathcal{V}$の元と考えてよい。従って$\mathcal{F}$は$\mathcal{V}$上の線形変換となるのである。では$\mathcal{F}$の固有値，固有ベクトルはなんだろう？

実はここに統計等で有名なガウス関数$e^{-\frac{x^2}{2}}$が登場する。即ち，

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}}]=e^{-\frac{s^2}{2}}$$

となることが証明できる[*14]ので，ガウス関数は$\mathcal{F}$の固有値 1 に属する固有関数と言える（不動関数と言ってもよい）。線形代数的にはこれだけで興味深いが，さらにフーリエ理論を駆使すると，前節の熱伝導の方程式を，ガウス関数を少し修正した関数を用いて記述できる。これは通常の教科書に書いてあるので説明は省略するが，熱核（heat kernel）と呼ばれるガウス型関数

$$E(x,t):=\frac{1}{2\sqrt{\pi ct}}e^{-\frac{x^2}{4ct}}$$

と合成積$*$を用いて，熱伝導の方程式 $\{(2),(7)\}$ の解は，

$$f(x,t)=E(x,t)*\varphi(x)$$

と表せる[*15]。

補足 4.1　自然数nに対して定まるエルミート多項式$H_n(x)$とガウス関数の積

$$e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$$

（これをエルミート関数と呼ぶ）もフーリエ変換の固有値$(-i)^n$の固有関数である[*16]。

補足 4.2　ラプラス変換の固有関数は何か？これは，学生に問うべきよい問題である。ラプラス変換$\mathcal{L}$は，関数$f(x)$に対して，

$$\mathcal{L}[f(x)]=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

で定義する。（ラプラス変換は応用上，主に時間を変数とする関数に使われるので，変数はtにするのが普通だが，ここではフーリエ変換と比較するため，敢えてxを使った。すると，虚軸に沿って$-\infty$から∞までラプラス変換したものがフーリエ変換という解釈もできる。）

よく知られた公式[*17]

$$\mathcal{L}[x^\alpha]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

（但し，$\alpha>-1$でΓはガンマ関数）において，$\alpha=-\frac{1}{2}$のときが固有関数だとわかる。そこで固有値$\Gamma(-\frac{1}{2}+1)=\Gamma(\frac{1}{2})$を調べると，有名な等式

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を使うことで$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$を得る。従って，高校生にも馴染み深い関数$\frac{1}{\sqrt{x}}$は，ラプラス変換の固有関数であり，その固有値は$\sqrt{\pi}$である：

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

5　フーリエ変換のユニタリー性

最後に，フーリエ変換がユニタリー変換であること（パーセバルの定理）について述べる。まず，$f=f(x)$, $g=g(x)\in\mathcal{V}$に対して，内積

$$(f(x),g(x))=\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

を定義する。実はこれだけでも，線形代数的考えが如何に他の分野で役立つかを説明できる。基本的なこととしては，$\|f\|=\sqrt{(f,f)}$によって内積からノルムを定義したり，2 つの関数$f(x)$, $g(x)$の直交性

[*12]［長・齋］，100ページを参照.
[*13]［吉川 2］, 65ページを参照．多次元の場合は［新井］, 51ページを参照.
[*14]［高橋 2］，230ページの例6.1を参照.
[*15]［高橋 2］，232ページを参照.
[*16]［高橋 2］，244ページの定理6.15を参照.
[*17]［芦・ヴ］，208ページを参照.

を $(f, g)=0$ によって定義することもできる。これによって$\mathcal{V}$を通常のユークリッド空間のように扱うことができる。例えば上記補足4.1のエルミート関数系は，この内積に関して直交系をなす。

補足 5.1　内積の積分区間を［$-\pi, \pi$］に変更すれば，フーリエ級数展開に現れる関数系

$$\{1, \cos mx, \sin nx | m, n \in \mathbb{N}\} \text{ や}$$
$$\{e^{imx} | m \in \mathbb{Z}\}$$

もそれぞれ直交系をなす。また，それぞれの関数のノルム$\sqrt{\pi}$や$\sqrt{2\pi}$で割ることで，

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\} \text{ や}$$
$$\left\{\frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} | m \in \mathbb{Z}\right\}$$

はそれぞれ正規直交系となる。これらと，線形代数で学習する，いわゆる正規直交基底との違いをはっきりさせることは，解析と線形代数の学問的境界をも明確にしてくれる。

ここでは，フーリエ変換がこの内積に関してユニタリーであること（等長変換と言ってもよい）を示したいわけだが，厳密な証明は難しく（ベクトル空間$\mathcal{V}$もしっかり定義しなくてはいけなくなる），多くの人はこの驚くべき事実を知らずに通り過ぎてしまう。実は細かいことを無視すれば，フビニの定理[*18]（ある条件下では，積分順序を変えてもよいという定理）と逆フーリエ変換$\mathcal{F}^{-1}$を使うだけで証明出来る。

さて，証明したい式は

$$(f, g)=(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)) \tag{10}$$

である。

証明：$(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g))$

$$=\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}(g)}ds$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{F}(f)\int_{\mathbb{R}}\overline{g(x)}e^{isx}dx\right)ds$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{F}(f)\int_{\mathbb{R}}\overline{g(x)}e^{isx}ds\right)dx$$

（フビニの定理より ds と dx を入れ換えた）

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\overline{g(x)}\int \mathcal{F}(f)e^{isx}ds\right)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\overline{g(x)}\,\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)\right)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\overline{g(x)}\,f(x)dx=(f, g)$$

となる。（実はこの証明はまず「急減少な関数」からなる$\mathcal{V}$の稠密な部分空間で証明し，それを全体に拡張して示すのである。［藤・黒］）□

さらに，通常の線形代数（有限次元ベクトル空間では），これで自動的に$\mathcal{F}$は同型写像となるわけだが，無限次元ベクトル空間$\mathcal{V}$では，まだ単射しか言えてない。実際，もし$\mathcal{F}(f)=0$ ならば，$0=(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(f))=(f, f)$ となり，内積の正定値性より $f=0$ となる。よって$\mathcal{F}$は単射である。（ノルムを用いれば,ユークリッド空間的な説明もできる。即ち，等長変換だから，長さが 0 となるベクトルに移るベクトルはゼロベクトルだけ。）ところが無限次元ベクトル空間には次元定理がないので，単射なら全射は言えないのである。こういう点でも，線形代数で取り上げる価値がある。（通常，関数解析でユニタリー変換と言えば，全射も仮定する。）実はこの$\mathcal{F}$は全射であることも証明できる。ただ，これを示すには，位相空間論的知識が必要である。実際，$\mathcal{F}$は等長変換となるから$\mathcal{F}$の像は閉集合となり，さらに急減少な関数からなる部分空間を含むので，像は稠密となる。従って像と$\mathcal{V}$は一致し，全射が言えるのである（詳しくは［藤・黒］，［岡・中］，［吉川 1］などを参照）。

6　おわりに

線形代数の大きな柱として，行列論，行列式論，一次変換論，そして抽象的ベクトル空間の一般論がある。この最後の柱以外は，数ベクトル空間だけで十分であり，抽象的ベクトル空間論は触れなくても十分理論展開可能である。実際，ベクトル空間といえば数ベクトル空間のこととして理論を進める教科書も多い。ただ，線形代数を他の分野でも使って行こうとすると，抽象的ベクトル空間の理解は避けられない。この意味でも，解析と線形代数の繋がりを理解しておくことは重要となる。特に解析計算を日常的に行う工学系の学生には，線形変換といえばすぐに行列ではなく，微分，積分，そしてフーリエ変換も念頭に置いて議論して欲しい。

謝辞　秋田高専自然科学系，成田章教授にご教授頂き，初稿の誤りを修正することが出来ました。こ

[*18]［垣田］，66ページの定理8-3，または［溝畑］，127ページの定理4･6を参照.

こに感謝の意を表します。

参考文献

［芦・ヴ］ 芦野隆一・レミヴァイアンクール，MATLABによる微分方程式とラプラス変換，共立出版，2000.

［新井］ 新井仁之，フーリエ解析と関数解析学（数学レクチャーノート基礎編），培風館，2001.

［岡・中］ 岡本久・中村周，関数解析（1，2），岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1997.

［垣田］ 垣田高夫，ルベーグ積分しょーとこーす，日本評論社，1995.

［黒田］ 黒田成俊，微分積分，共立出版，2002.

［小泉］ 小泉澄之，フーリエ解析，理工系基礎の数学 7，朝倉書店，1972.

［高橋 1］ 高橋陽一郎，実関数と Fourier解析 1，岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1996.

［高橋 2］ 高橋陽一郎，実関数と Fourier解析 2，岩波講座現代数学の基礎，岩波書店，1998.

［竹之内］ 竹之内脩，フーリエ展開，使える数学シリーズ 6，秀潤社，1978.

［長瀬］ 長瀬道弘，微分方程式，裳華房，1993.

［長・齋］ 長瀬道弘，齋藤誠慈，フーリエ解析へのアプローチ，裳華房，1997.

［藤・池・犬・高］藤田 宏，池辺晃生，犬井鉄郎，高見穎郎，数理物理に現れる偏微分方程式Ⅰ，岩波書店，1977.

［藤･黒］藤田 宏, 黒田成俊, 関数解析Ⅰ, 岩波書店，1978.

［溝畑］溝畑 茂，ルベーグ積分，岩波全書 265，1974.

［吉川 1］吉川 敦，関数解析の基礎，近代科学社，1990.

［吉川 2］吉川 敦，フーリエ解析入門，森北出版，2000.