

サーボ機構の Sensitivity 設計法

(第 3 報)

柳 原 昌 輝

The Design Method with Sensitivity in Servo Mechanism

Masateru YANAGIWARA

1 ま え が き

サーボ機構の設計に Sensitivity の考えを入れて設計するもので、サーボ系の過渡応答に最も大きな影響を与える代表根と、定常特性の設定に寄与する定速度偏差定数とに着目し、Sensitivity を指定することによって、対象系の解析並びに設計を極めて直接的に進めようとするものである。第二報では、これらの数式的解析について検討してきたが第三報では、補償系の設計をデジタルコンピュータで求めた結果をグラフ化しそれから求めるやり方と、各系のアナログコンピュータによる過渡特性と定常特性の比較検討を行ってみた。

次に一般式は

$$P_3' = \frac{(4\xi_0^2 k + 1 - 2\xi_0 k P' - k) + \sqrt{(4\xi_0^2 k + 1 - 2\xi_0 k P' - k)^2 - 4k(2\xi_0 - P')^2}}{2k(2\xi_0 - P')} \dots\dots\dots (2-1)$$

$$N' = \frac{(P_3' - \xi_0)^2 + (1 - \xi_0^2)}{4(1 - \xi_0^2) \{ (P' + P_3' - 3\xi_0)^2 + (1 - \xi_0^2) \}} \times P' \dots\dots\dots (2-2)$$

$$KVN = \frac{P' + P_3' - 2\xi_0}{P' P_3'} \dots\dots\dots (2-3)$$

計算結果をグラフ化して、全体としての P' に対する傾向を調べてみた。k = 0.05, 0.15, 0.25 の 3 点について ξ₀ を Parameter にして、Pole-Sensitivity 特性 P' - P₃' 特性、Pole 一偏差特性の各曲線を描いた。Fig (2-1) ~ Fig (2-9) がその曲線である。なお k は補償部の零点と極の関係を示す定数である。

2. 2 各曲線に対する考察

2. 2. 1 Pole - Sensitivity 特性

N' は近似的に直線的増加を示している。P' は 0.1 ~ 0.6 までの変化に対する N' を計算したのであるが N' は 20% 付近におさえて、それ以下に斜線をほどこしてある。これは、N' が 20% 以上になると Pole の変動に対する Sensitivity が大きすぎ、Sensitivity が悪いという意味なので設計する際にはこの範囲内で設計すべきであるという目安にするためである。

2 Sensitivity 設計法

2. 1 デジタルコンピュータによる演算結果

$$\text{固定部伝達関数} \dots\dots\dots \frac{K_1}{S(S+P)}$$

$$\text{補償部伝達関数} \dots\dots\dots \frac{K_2(S+Z_1)}{(S+P_3')}$$

研究紀要第二報で考察した進み補償付加の場合の補償部の極と、Sensitivity 及び速度定数の一般式に次の値を入れて計算してみた。なお、計算にあたっては、FACOM 270-20 を使用した。

P' : 0.1 ~ 0.6 (0.01up) VARIABLE
 k : 0.05 < k < 0.25 (0.05up)
 ξ₀ : 0.3 < ξ₀ < 0.8 (0.05up) } PARAMETER

今、N' を 10% に指定すれば同一の固定部の極に対しては、ξ₀ が小さい程 ω₀ が小さくなるので速応性が悪くなる。反対に ξ₀ が大きすぎると、ω₀ が大きくなり速応性が良好になるが、実際の設計上においては、ω₀ には限界がある。そこで ξ₀ は 0.4 ~ 0.6 位の値を採用すべきであろう。又同一の P' に対しては、k が大きくなるに従って N' が大きくなる (Sensitivity が悪くなる) 傾向にあることがわかる。設計に当っては k の最小値 k = 0.05 を採用すべきであろう。

k = 0.05, N' = 10 (%) の時、最大の ξ₀ = 0.6 であれば P' = 0.19, P₃' = 19, Z₁' = 0.95 で、Z₁' は P' よりも外側にある。又このとき、固定部の P が極端に小さければ、複素極の実数部の内側に Z₁ が入ることもありうる。しかしこの場合、P と Z₁ はダイポールを構成するので、過渡応答への影響はほとんどないであろう。

2. 2. 2 Pole - 偏差特性

縦軸は ε' = 1/KVN を目盛った。注意する点は次の事

である。

$$\varepsilon = \frac{1}{KV} = \frac{1}{\omega_0 KV N} = \frac{\varepsilon'}{\omega_0}$$

つまり実際の (Normalize しないときの) 定常偏差を求めるときは、そのときの ω_0 で ε' を割ってやればよい。特性は k の値にかかわらず、大体直線的に増加している。この傾向は $N'-P'$ 特性と類似しているので、設計する場合には、極めて都合が良い。つまり N' を小さくおさえようとすれば、それに比例した小さな値である ε' を選ぶことができるからである。

又、 k が小さければ、 ξ_0 の変化に対しては、 ε' は大きくは変化していないが ($k = 0.05$ の場合はほとんど同一直線に近い)、 $k = 0.25$ になるとはなはだしく変化している。このことから設計の際には、 $k = 0.05$ を採用した方が良いことがわかる。

2.2.3 P'-P3' の関係

P' が指定 (決定) されれば (2-1) 式により $P3'$ が求まるが、このように $P'-P3'$ の関係の曲線を描いておくことにより、設計する際に、手軽に $P3'$ の値がわかるので、このグラフは、設計の際には有効なものとなるであろう。

3 アナログコンピュータによる演算結果

3.1 アナログコンピュータの模擬

伝達関数をアナログ計算機によって模擬する方法には、種々の方法がある。本文では、伝達関数を変形することにより模擬することができる。この手法は、補償部が付加され、伝達関数が複雑になっても比較的簡単に模擬することができる便利な手法である。

3.1.1 補償なしの場合

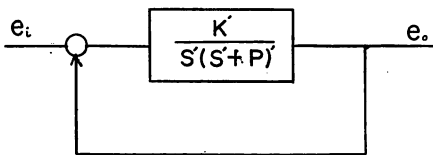


Fig (3-1)

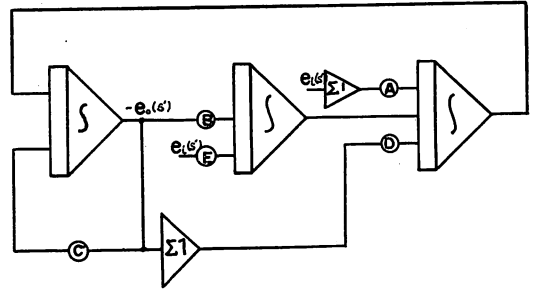
$$G_0(s) = \frac{G}{1+G} = \frac{K_1'}{S'(S'+P)'+K_1'}$$

$$= \frac{K_1'}{S'^2 + P'S' + K_1'}$$

$$\frac{e_0(s)}{e_i(s)} = \frac{K_1'}{S'^2 + P'S' + K_1'} = \frac{K_1'/S'}{S' + P' + K_1'/S'}$$

$$\therefore S'e_0(s) = -P'e_0(s) + \frac{(K_1'e_i(s) - K_1'e_0(s))}{S'}$$

よってブロックダイアグラムは、



Block Diagram 1

P', K_1' は POTENTIOMETER である。

3.1.2 直列補償した場合

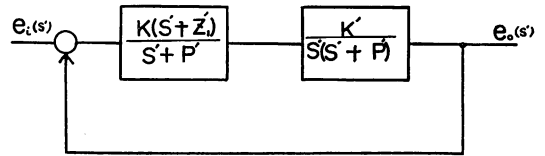


Fig (3-2)

3.1.1 と同様にして、

$$S'e_0(s) = -(P'+P3')e_0(s) + \frac{\{K_1'K_2e_i(s) - (P'P3' + K_1'K_2)e_0(s)\}}{S'} + \frac{\{Z_1'K_1'K_2e_i(s) - Z_1'K_1'K_2e_0(s)\}}{S'^2}$$

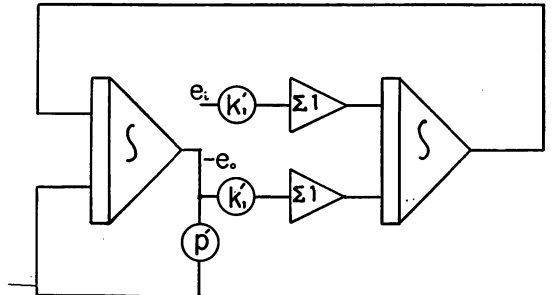
上式で各係数を次の様におく

$$A = K_1'K_2 \quad D = P'P3' + K_1'K_2$$

$$B = Z_1'K_1'K_2 \quad E = Z_1'K_1'K_2$$

$$C = P_1' + P_3'$$

よって上式のブロックダイアグラムは次の様になる。



Block Diagram 2

但し、A, B, C, D は POTENTIOMETER である。

POTENTIO はいずれも NORMALIZE された値であるからインディシナル応答の時間軸は $\omega_0 t$ である。故に、実時間 t は ω_0 で割らなければならない。 $\omega_0 t$ は無次元化されているのであるが便宜上 [sec] で目盛った。補償前、後の TIME-SCALEFACTOR はそれぞれ、 $\alpha = 1, \alpha = 3$ である。故に補償付加の TIME-SCALE は 3 倍スケールで目盛ってある。又 $\xi_0 = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ の 4 点については、 P' を $\pm 10\%$ 変化した場合の応答

についても示してある。

3.1.3 POTENTIOMETER の設定

3.1.2 ではブロックダイアグラムを組み計算機に設定した。POTENTIO は $k = 0.15$ の場合、FIG (2-4) より $N = 10$ (%) に対する P' を $\xi_o = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ の4点について計算した。

TABLE 1

N	ξ_o	P'	P_s'	q_s'	Z_1'	$K_1'K_2$
10(%)	0.3	0.186	13.82	13.41	2.07	6.475
	0.4	0.180	9.22	8.60	1.382	6.225
	0.5	0.150	6.67	5.82	1.0	5.820
	0.6	0.123	5.2	4.1	0.78	5.260

固定部を $P = 6, K_1 = 200$ とすれば

TABLE 2

ξ_o	ω_o [rad/sec]	P	P_s	q_s	Z_1	K_1K_2
0.3	32.25	6	447	433	66.8	6740
0.4	33.30	6	307	286	46.0	6940
0.5	40.0	6	266	232	40.0	9300
0.6	48.80	6	254	200	38.1	12490

3.1.4 アナログ計算機による演算結果

[A]補償前

$\xi_o = 0.23, \omega_o = 14.4$ (rad/sec) $P = 6$
 $P' = 0.123, K_1 = 200, K_1' = 0.0842$

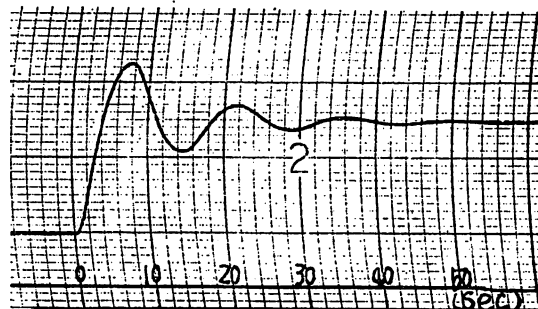


Fig (3-5)

[B]進み補償付加

$N = 10$ (%) $\xi_o = 0.6$
 $\omega_o = 48.8$ (rad/sec)
 $P' = 0.123, P = 6$

昭和46年1月



Fig (3-6-1)

$P' = (+10\%) = 0.135, P = 6.6$



Fig (3-6-2)

$P' = (-10\%) = 0.111, P = 5.42$



Fig (3-6-3)

[C]進み補償付加

$N = 10$ (%) , $\xi_o = 0.5, \omega_o = 40.0$ (rad/sec)
 $P' = 0.15, P = 6$



Fig (3-7-1)

$P' = (+10\%) = 0.165, P = 6.6$

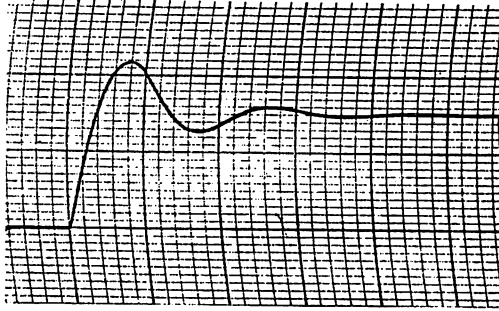


Fig (3-7-2)

$P' = (-10\%) = 0.135, P = 5.4$

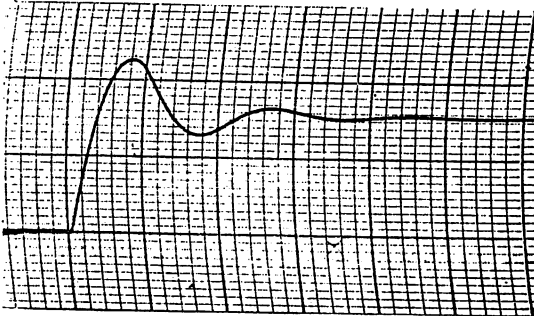


Fig (3-7-3)

[D]進み補償付加

$N = 10 (\%), \xi_o = 0.4, \omega_o = 33.3 (\text{rad/sec})$
 $P' = 0.180, P = 6$

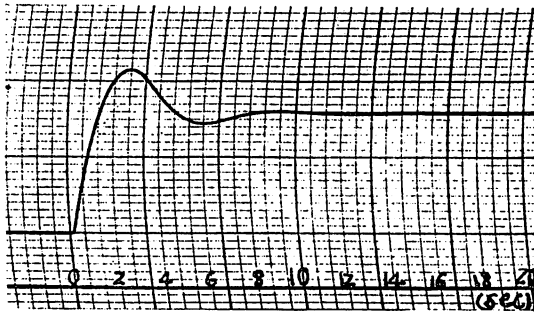


Fig (3-8-1)

$P' = (+10\%) = 0.198, P = 6.6$

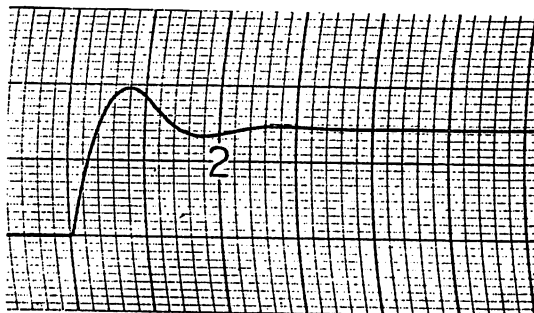


Fig (3-8-2)

$P' = (-10\%) = 0.162, P = 5.4$

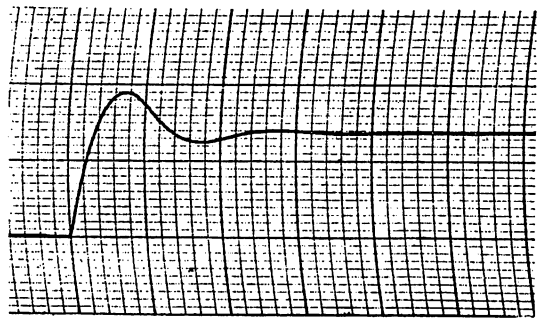


Fig (3-8-3)

[E]進み補償付加

$N = 10 (\%), \xi_o = 0.3, \omega_o = 32.25 (\text{rad/sec})$
 $P' = 0.186, P = 6$

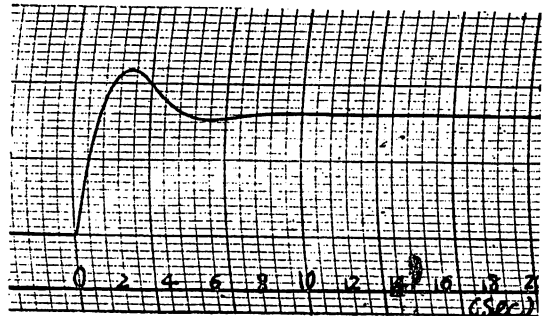


Fig (3-9-1)

$P' = (+10\%) = 0.205, P = 6.58$

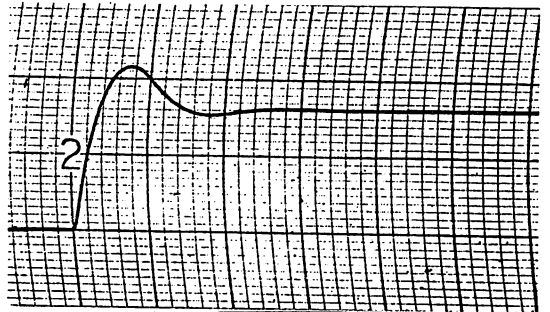


Fig (3-9-2)

$P' = (-10\%) = 0.167, P = 5.4$

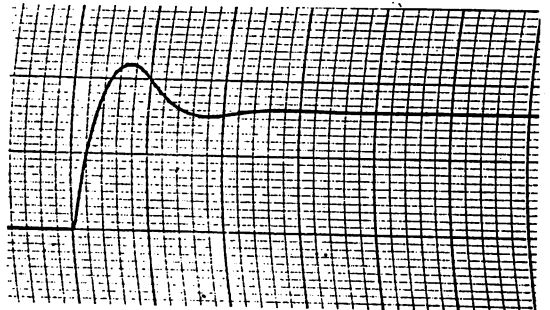


Fig (3-9-3)

以上いずれも 1 (mm/sec), 1 (V/cm) である。

3.1.5 考 察

オーバーシュートは[A]に比較して、いずれも小さくおさえられている。その度合は、 ξ_0 が小さい程小さくなっている。[B], [C], [D], [E]は[A]と比較して立上りが良くなっている。P'を微小変化した時の応答波形は ξ_0 が大になる程その変化は少ない。例えば、[E]の $\xi_0 = 0.3$ では、オーバーシュートは、微小変化後、いずれも小さくなっている。立上りは変わらない。

4 設 計 手 順

本研究の Sensitivity 設計法は、与えられた系があり、まず Sensitivity : Nを設定し、しかる後にこの系の補償部 H(s)を設計することである。なおこの設計法は、開ループ伝達関数、閉ループ伝達関数が同時に設計され、又設計の三大要素である速応性、減衰特性、定常特性を十分満足させるように設計を進めることが可能である。

今固定部伝達関数が次の様に与えられる。

$$G(s) = \frac{K_1}{S(S+P)}$$

仕様で ξ_0 が指定されれば、2-1で考察したように、 $k = 0.05$ として、まず FIG (2-1) より $N = 10$ (%)としてやれば、P'が求まる。次に FIG (2-2) より P'に対する P₃'を求める。P', P₃'が決まると

$$q_3' = P' + P_3' - 2\xi_0 \dots\dots\dots (4-1)$$

$$\text{但し, } Z_1' = kP_3', K_1' = K_1/\omega_0^2 \dots\dots (4-3)$$

$$K_1'/K_2 = \frac{P' + P_3' - 2\xi_0}{kP_3'}$$

$$K_2 = \frac{q_3'}{K_1'Z_1'} \dots\dots\dots (4-2)$$

の両式と Z₁', P₃'の関係式より、q₃', Z₁', K₂が決まる。以上により NORMALIZE された補償部の要素が決まる。固定部が前式により与えられているから、系の ω_0 [UNDAMPED, NATURAL, FREQUENCY] は次により求まる。

$$\omega_0 = \frac{P}{P'} \dots\dots\dots (4-4)$$

ω_0 が求まれば P₃, Z₁, K₂は次の様に求まる。

$$P_3 = \omega_0 P_3' \dots\dots\dots (4-5)$$

$$Z_1 = kP_3 \dots\dots\dots (4-6)$$

$$K_2 = \frac{q_3'}{K_1'Z_1'} \dots\dots\dots (4-7)$$

ここで補償部伝達関数 H(s)を、R-C 電気回路を用いて実現してみる。まず位相進み補償の場合の回路構成は FIG (4-1) で行なわれる。

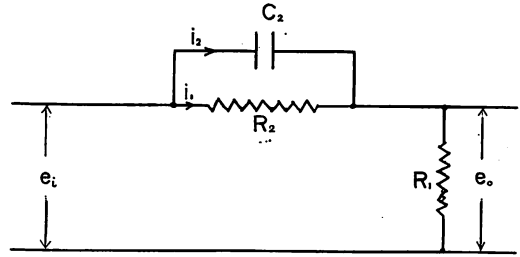


Fig (4-1) 位相進み補償

図から次の方程式を得る。但し下式はラプラス変換した形である。

$$\frac{I_2(s)}{C_2 S} = R_2 I_1(s) \dots\dots\dots (4-8)$$

$$E_i(s) = R_2 I_1(s) + E_o(s) \dots\dots\dots (4-9)$$

$$E_o(s) = R_1 [I_1(s) + I_2(s)] \dots\dots\dots (4-10)$$

(4-8) 式から I₂(s)を (4-9) 式に代入し

$$E_o(s) = R_1 (1 + R_2 C_2 S) I_1(s) \dots\dots\dots (4-11)$$

を得る。(4-10) 式から

$$E_i(s) = R_2 I_1(s) + R_2 (1 + R_2 C_2 S) I_1(s) \dots\dots\dots (4-12)$$

となる。(4-11), (4-12) 式を用いて、補償部伝達関数 H(s)は、

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_1 (1 + R_2 C_2 S)}{(R_1 + R_2) + R_2 C_2 S R_1} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + R_2 C_2 S}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot R_2 C_2 S} \\ &= k \cdot \frac{1 + TD S}{1 + kTD S} \dots\dots\dots (4-13) \end{aligned}$$

$$\text{但し, } k = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad TD = R_2 \cdot C_2$$

である。H(s)は(第二報)の(3-15)式より

$$H(s) = \frac{K_2(S+Z_1)}{S+P_3} \dots\dots\dots (4-14)$$

である。次に増巾器のゲインを A として、回路を構成してみると Fig (4-2) となる。

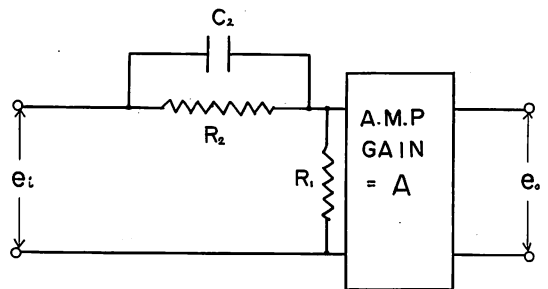


Fig (4-2) AMP を加えた補償部の構成

増巾器を入れた時の伝達関数は(4-14)式から

$$H(s) = A \cdot \frac{S + 1/T_D}{S + 1/k \cdot T_D} \dots\dots\dots (4-15)$$

と表わせる。(4-14), (4-15)式を比較すれば次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= A \\ Z_1 &= 1/T_D = 1/R_2 C_2 \\ P_3 &= 1/k \cdot T_D \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_2} = \frac{Z_1}{k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4-16)$$

(4-16)式を用いて実際のR₁, R₂, C₂の値を定めよう。

5 例 題

$$G(s) = \frac{200}{S(S+6)}$$

固定部を上式で与える。今、進み補償を付加するものとする。ξ₀ = 0.6に指定すれば、k = 0.15とし、N = 10(%)のときFig(2-4)よりP' = 0.123となる。次にFIG(2-5)よりP₃' = 5.2と求まる。よって、q₃', Z₁', K₂は(4-1), (4-2), (4-3)式とZ₁', P₃'の関係式より

$$q_3' = 4.1, \quad Z_1' = 0.78, \quad K_2 = 62.7$$

次に(4-4)式より

$$\omega_0 = \frac{P}{P'} = \frac{6}{0.123} = 48.8 \text{ [rad/sec]}$$

故にP₃, Z₁, q₃は次の様になる。

$$P_3 = 254, \quad Z_1 = 38.1, \quad q_3 = 200$$

次に補償部H(s)の要素を決定する。いま

$$k = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0.15$$

よって(4-16)式より

$$R_2 = 5.67 R_1 \dots\dots\dots (5-1)$$

一方T_Dは

$$T_D = R_2 C_2 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{87.1} = 0.02625 \text{ (sec)}$$

$$\therefore R_2 C_2 = 0.02625$$

今R₁, R₂を(KΩ)ORDERとし、C₂を(μF)のORDERに取れば

$$R_2 C_2 = 26.25 \dots\dots\dots (5-2)$$

(5-1), (5-2)式より

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{26.25}{5.67 C_2} \\ R_2 &= \frac{26.25}{C_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5-3)$$

を得る。(5-3)式を用いて、今C₂ = 0.1(μF)に選べば

$$R_1 = \frac{26.25}{5.67 \times 0.1} = 46.3 \text{ (KΩ)}$$

$$R_2 = 5.67 R_1 = 262.5 \text{ (KΩ)}$$

設計は次のとおりである。

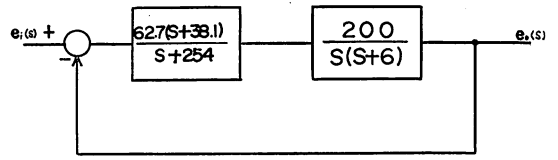


Fig 5 Block Diagram

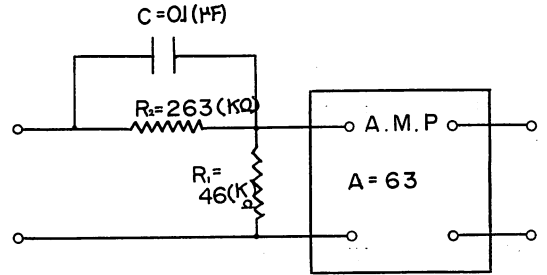


Fig 6 COMPENSATING ELEMENT & AMP

6 設計の検討

速応性は補償前のω₀ = 14.4 (rad/sec)より、補償後のω₀ = 48.8 (rad/sec)に改善された。Fig(3-5)~Fig(3-9-3)は補償前、補償後のアナログコンピュータの演算結果である。応答速度は演算時間においては、約6倍程度、実時間においては、約20.3倍に改善されている。

又、Nを指定することにより調整するξ₀がわかれば、固定部の極より、ω₀が自動的に求まり、代表根の位置が設定される。この例題においては、P₃, Z₁が複素極の実数部の6倍以上の距離にあるので、過渡応答の形はほとんど代表根で指定されたものと考えられる。Fig(3-6-1)~Fig(3-9-3)参照

次に定常特性はFig(2-6)よりε' = 0.155

$$\therefore K_v N = \frac{1}{0.155} = 6.46$$

ω₀ = 48.8 (rad/sec)であるから、定速度偏差定数K_vは

$$K_v = 315 \text{ (sec}^{-1}\text{)}$$

よって定常偏差εは、

$$\epsilon = \frac{1}{315} = 0.00318$$

よってεはきわめて小さな値におさえることができる。Fig(3-6-1)~Fig(3-9-3)にP'の微小変化(±10%)に対する応答波形を示してある。N = 10(%)であるため、P'の微小変化に対するその応答波形にはほとんど変化がみられない。

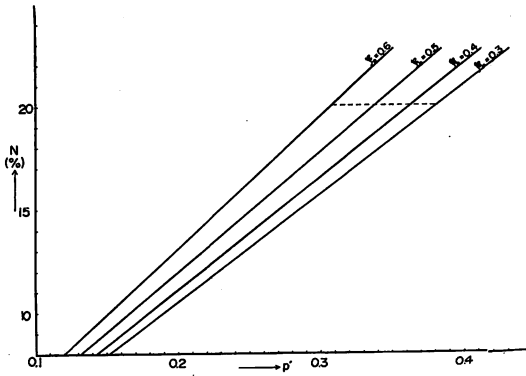


Fig (2-1)
Pole-Sensitivity 特性 ($k = 0.05$)

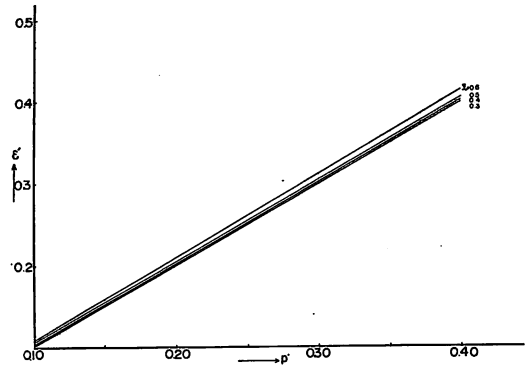


Fig (2-3)
Pole-偏差特性 ($k = 0.05$)

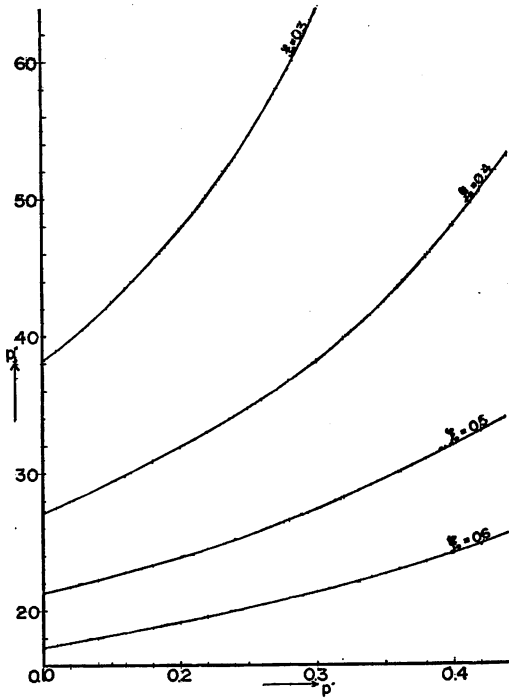


Fig (2-2)
 $P' - P_s'$ 特性 ($k = 0.05$)

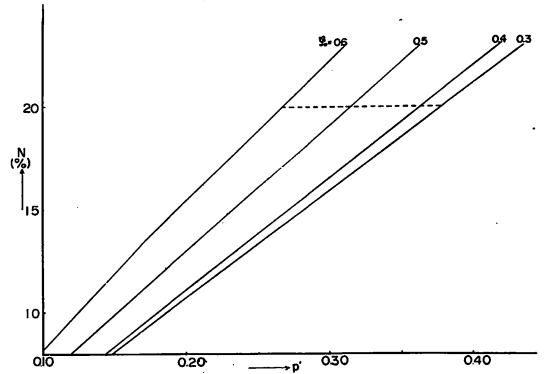


Fig (2-4)
Pole-Sensitivity 特性 ($k = 0.15$)

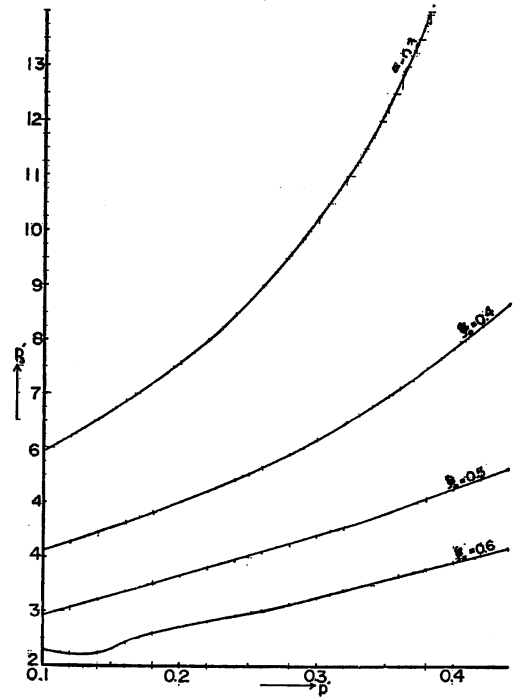


Fig (2-5)
 $P' - P_s'$ 特性 ($k = 0.15$)

7 あとがき

以上、一次進み直列補償のサーボ機構設計法として、本研究において、Sensitivity を指定することにより、任意の代表根を選ぶという設計法についてのべた。この設計法は、設計の三大要素である速応性、減衰特性、定常特性を十分に満足することができる。つまり、過渡応答が設定された代表根だけにしか影響を受けないということである。又 Fig (2-1) ~ Fig (2-9) は実際

の設計を容易にする。

終りにこの研究を進めるにあたり、終始ご指導、ご検討いただいた秋田大学片山愛介教授、渡部倫寧助教授に深謝いたします。

参 考 文 献

片山, 電学誌 35—80
 片山, 柳原 計測自動制御学会東北支部研究集会予稿 (1967)
 片山, 渡部, 柳原 計測自動制御学会東北支部研究集会 (1967.11.27)
 片山, 柳原 電気関係学会東北支部連合大会 6A—17 (1967.10)
 柳原, 渡部, 片山 計測自動制御東北支部研究集会 (1970)

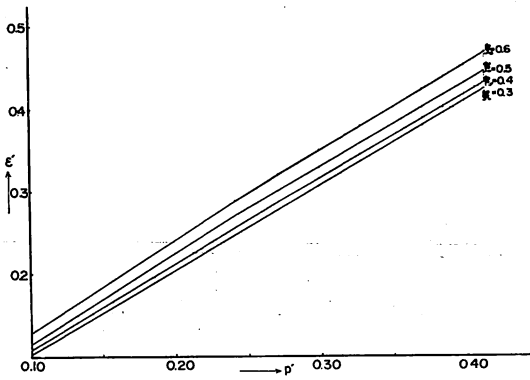


Fig (2-6)
 Pole - 偏差特性 (k = 0.15)

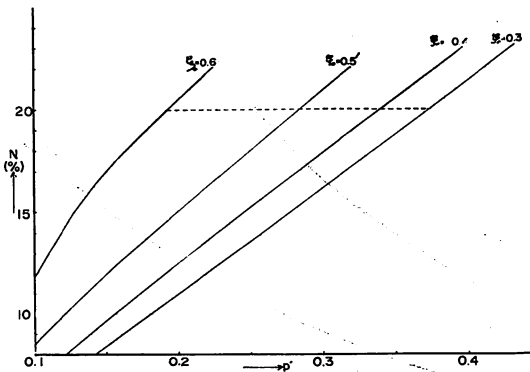


Fig (2-7)
 Pole - Sensitivity 特性 (k = 0.25)

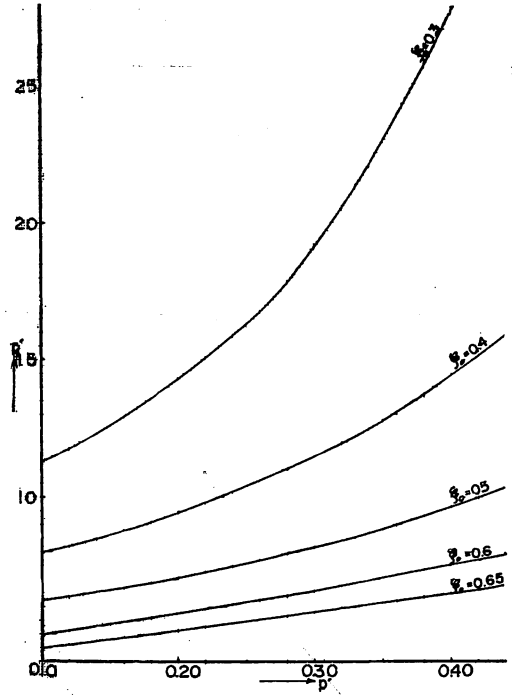


Fig (2-8)
 P' - P_s' 特性 (k = 0.25)

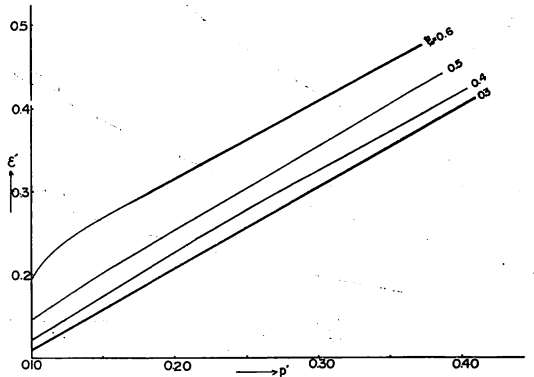


Fig (2-9)
 Pole - 偏差特性 (k = 0.25)