

対角化からジョルダン標準形

吉井 洋二

Jordan canonical forms right after diagonalization

Yoji YOSHII

(平成20年11月28日受理)

Jordan canonical forms are usually taught as a final topic in linear algebra. In fact, the theory is very advanced for the first year students. However, if we do not emphasize proofs, it is very natural and reasonable to teach Jordan canonical forms right after diagonalization of matrices. We need triangulation of matrices to develop the theory of linear algebra. We insist that Jordan canonical forms should be taught as a method of triangulation right after diagonalization of matrices.

KEYWORDS : Jordan canonical form, diagonalization, triangulation, matrix, eigenvector

1. 緒言

線形代数の授業において、ジョルダン標準形は2年目に習うのが普通である。その理由として、対角化できる行列に比べると、対角化できない行列は理論的に複雑であること、また、対角化の後に習う大切な行列(エルミート行列やユニタリー行列など)は対角化できるから、の2点が考えられる。ジョルダン標準形は、ある意味、対角化の次にいい形、分かり易い形と捉えることができ、連立微分方程式の解法などに役立つ。ところが、数学の研究においても、分野によってはそれほど重要とはならないので、教える順番は最後でいいと考えるのが普通なのかも知れない。

今回、筆者は秋田高専専攻科で線形代数を教えて、理論的な証明等をあまりする時間がない状況下での有効な線形代数の授業はどうあるべきかを考えた。まずは行列の計算をすることで、行列の性質に触れ、要求された形(対角化や三角化、正規直交基底等)を計算によって求めることが重要であると思った。即ち、理論的な裏付けや定理の証明は後回しでよいということである。証明は、計算ができるようになって、学生が理由を知りたくなったとき考えればいいのである。

そこで気づいたことが、行列の対角化を教えた後すぐにジョルダン標準形を学習するということだ。

まず、学生が行列の対角化をするために、固有値を全部求め、それらに属する固有空間を求める作業を想像してみる。通常の教科書だと、固有値の重複度と固有空間の次元が一致していないと、対角化できないとしてひとまず終わってしまう。学生の方は、せっかく求めた固有空間を、たとえ対角化できない行列でも、何かのために使えないものかと思うのではないか。このような疑問を、ある意味無視する形で、対角化はできなくても三角化ならいつでもできることを通常の本では学習する。三角化は非常に重要で、このおかげでいろいろなことがはっきりしてくる。(たとえば、すべての固有値の積が行列式に等しい、など。)ところが、通常の教科書で教える三角化は、それを保証する定理が先行してしまい、具体的な行列を三角化する場合、定理通りに進めると、無駄な計算をしてしまう。

そこで筆者は、三角化の教材として、アルゴリズムがよりしっかりしているジョルダン標準形がベストであると考えた。(ジョルダン標準形も三角行列であることに注意されたい。)このアルゴリズムは、対角化しようとして求めた情報がすべて役立ち、その計算は連立方程式の復習としても恰好である。この一見高度過ぎる、あるいは時間がない等の理由で敬遠されがちなジョルダン標準形を、早い段階でやらない手はないと考え、本論文にその導入法、教え方等をまとめた。理論的に新しい部分はないが、教

育的な教材研究として、行列の固有値、対角化における新教授法になると信じる。特に大学の工学部や高専においては、具体的な計算が重要であり、計算練習に重点がおけるこの教材は、連立方程式の理論が常に線形代数の根底にあることを実感させる意味でも、非常によい教材であると考ええる。

2. 必要な知識

連立方程式の一般解法、行列の階数、行列式、それからベクトル空間の基礎（抽象的なベクトル空間を理解する必要はなく、 \mathbb{C} や \mathbb{R} のベクトル空間的基本構造を知っているだけでよい）、たとえば、一次独立、基底、部分空間、線型写像、線型写像を表す行列、基底を変換したときの行列等を学習した後、正方行列の固有値、固有空間、行列の対角化を学習するところまでは通常の教科書と同様である。この後すぐにジョルダン標準形に入るのである。

3. ジョルダン標準形の導入

n 次の複素正方行列 A には重複度も数えて必ず n 個の固有値がある。また、 n 個の一次独立な固有ベクトルがあれば、 A は対角化できる。即ち、ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になる。ここまでは、証明を付けたとしても、さほど問題なく学習できる。筆者の経験では、このあと線形代数は難しくなる。（もちろん、最初に習った時は、ここまですらでも十分難しかったが、ここからさらに難しくなるという意味である。）一般的な教材を大雑把に言うと、三角化、エルミート行列やユニタリー行列の性質や正規直交基底、そして正規行列のユニタリー行列による対角化、最後に最小多項式やジョルダン標準形が来る。

さて、具体的な行列のジョルダン標準形を学生にわかるレベルで解説してみる。たとえば、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、 A を対角化せよと聞いてみる。できませんという答が出たところで、 A は一次独立な固有ベクトルが2個しかないので、対角化できないことを確認させる。実際、固有値は1と2であり、1は固有方程式の2重解となる。固有値1の固有空間は

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{で張られる部分空間で、固有値2の}$$

$$\text{固有空間は } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{で張られる部分空間である。}$$

$\{v_1, v_2\}$ は一次独立な集合だが（異なる固有値に属する固有ベクトルの集合は一次独立は学習済み）、 \mathbb{R}^3 の基底ではない。従ってこの行列は対角化できない。そこで、せめて上三角（対角成分より下が全部ゼロの行列）にできないだろうか考える。（上三角行列にできるだけでもかなり嬉しいことが後々わかってくることを注意する。）対角化できない行列は、固有方程式に重解がある場合に限ることを確認させてから、重解である1の固有ベクトルからうまくベクトルを選んで三角化する方法があることを、まずこの A に対して示す。このとき、上記固有ベクトルがそのまま役立つことに注意する。

さて、もう一つのベクトル v'_1 として、

$$(A - I)v'_1 = v_1 \tag{3.1}$$

を満たすものを選ぶ。ここで、もし後で理論的証明を付けるなら、 $(A - I)^2 v'_1 = 0$ となっていることに注意するとよい（即ち、 v'_1 は固有値1に属する広義固有ベクトルである）。連立方程式の復習をしながら

$$\text{ら (3.1) を解けば、一つの解として、 } v'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を}$$

得る。(3.1) は

$$Av'_1 = v_1 + v'_1$$

と書けること、さらに $\{v_1, v'_1, v_2\}$ が \mathbb{R}^3 の基底になっていることに注意すると、この基底に関する変換 A の表現行列は

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

になっていることがわかる。即ち、

$$(Av_1, Av'_1, Av_2) = (v_1, v'_1, v_2)J \tag{3.2}$$

となる。ここで、 $P = (v_1, v'_1, v_2)$ と置けば、(3.2) は

$$AP = PJ$$

と書けるから、

$$P^{-1}AP = J$$

を得る。この J を A のジョルダン標準形、 P をその変換行列と呼ぶわけであり、通常の本に載っているやり方である (たとえば, [3], [4] を参照)。この方法はどんな行列にも通用し、うまくいけば対角化でき、そうでなければ単に上三角ではなく、ジョルダン標準形と呼ばれる、よりシンプルな上三角行列になるのである。通常の本のように、対角化の後、三角化を保証する定理を証明し、少しだけその練習をするというやり方では、せっかく対角化で面白くなった行列の理論を、またつまらなくするように筆者には思えるのである。つまらないとは、一般の三角化には、しっかりしたアルゴリズムがないので(具体的な問題に対しては無駄な操作が多くなるので)、練習問題が楽しめないということである。三角化は、それができるということが大事なので、できることを証明して、練習問題はやらない先生も多いようである。(これも、いずれジョルダン標準形をやればよい、という心理が働いているからかも知れない。)

(補足 1) 実は、一次独立な固有ベクトルが $n-1$ 個ある n 次正方行列では、もう 1 つのベクトルとして、そのベクトルを付け加えた n 個が基底になっていれば何でもよいである。上記例では、 $|v_1, v_2, w|$ が基底になる w なら $Aw = av_1 + bv_2 + cw$ となる $a, b, c \in \mathbb{R}$ が存在するから、 $P = (v_1, v_2, w)$ とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

と上三角にできるわけである。このことをもし学生が指摘すれば、より授業が楽しくなるわけで、その場合、一次独立な固有ベクトルが 1 個しかない 3 次正方行列をさらに例題として出すのがよいだろう。

4. ジョルダン標準形へのアルゴリズム

上記の方法を一般の場合でまとめる。方針を先に述べると、まず各固有値に属する一次独立な固有ベクトルを求める。もし、固有値が重解であって、その重複度分だけ、固有ベクトルが取れなかった場合(取れた場合は対角化可能)、上記方法によって新たに(広義固有)ベクトルを求めて(重複度分のベクトルを得るまで繰り返す)、それらを全部並べた行列を P とするのである。ここで、この固有値が重解の場合の操作を記号を使って述べておく。

固有値 λ が m 重解とする。まず、 p_1, \dots, p_s を λ の一次独立な固有ベクトルとする。(ただ 1 個の場合もあるし、 m 個の場合もあり、 m 個の場合はこれ以上何もする必要がない。) もし $s < m$ ならば、

$$(A - \lambda I)p_i^{(1)} = p_i \quad (4.3)$$

となる解 $p_i^{(1)}$ を求める。ここで、すべての p_i に対して解があるとは限らない。ではどの p_i を選べばよいのか?

(補足 2) たとえば、 4×4 行列で、固有値 λ が 4 重解、一次独立な固有ベクトルが p_1, p_2, p_3 と 3 つ存在した場合、あと 1 つベクトルが必要なわけだが、どれを選んで方程式 (4.3) を解けばいいのだろうか? 2 つなら両方試して、解がある方を選べばよいわけだから、面倒な議論をするより手っ取り早いのが、3 つ以上ある時は、やはり選び方はないか気になるところである。

ところが、固有ベクトルだけを見て、どれを選べばいいかを判定する方法はない ([4] 参照)。通常的一般論では、(固有ベクトルからスタートするのではなく)、まず

$$(A - \lambda I)v \neq 0, \dots, (A - \lambda I)^{k-1}v \neq 0, \\ (A - \lambda I)^k v = 0 \quad (4.4)$$

なる自然数 k とベクトル v の存在を示し、これら k 個のベクトル

$$v, (A - \lambda I)v, \dots, (A - \lambda I)^{k-1}v$$

がジョルダン標準形の変換行列を構成する k 列分となることを示すのである。しかしこのような v を具体的に見つけるのは難しいと言わざるを得ない。(ここで、 $(A - \lambda I)^{k-1}v$ が A の固有ベクトルになっていることを注意されたい。また、 k は m 以下であり、もし一次独立な λ の固有ベクトルが 1 つなら $m = k$ となる。さらに言うと、もし上記条件を満たす最大の k が m の半分より小さければ、(4.4) を満たす一次独立なベクトルは 1 個かも知れないし、2 個以上存在するかも知れないのである。もし 2 個なら、上記方法で変換行列の $2k$ 列分を得る。) 従って、既に求めることに慣れている、固有ベクトルからスタートした方がよいと考えるのは自然である。

固有ベクトル p_1, \dots, p_s だけをみて判定する方法はないが、一つの方法として、

$$(A - \lambda I)v = p_1 \cdots p_s$$

と右辺に縦ベクトルを s 個並べて、同時にガウスの消去法を行うことで、右辺のどのベクトルの時、解があるかを調べればよい。解を持つ p_i に対して v として、記号 $p_i^{(1)}$ を使うのである。

さて、 p_1, \dots, p_s にこれら $p_i^{(1)}$ を加えてもまだ m 個に満たないかもしれない。その場合は、同様にして、

$$(A - \lambda I)p_i^{(2)} = p_i^{(1)}$$

となる解 $p_i^{(2)}$ を加える。(もちろん $p_i^{(1)}$ は 1 つとは限らないので上記の選択問題を含む。従って、 $p_i^{(1)}$ が複数の場合は右辺にそれらを並べてガウスの消去法を行う。) まだ m 個に満たない場合は同じことを繰り返す。最終的に m 個の列ベクトルを得る。(実は、 m 個得たとき、もう一回この操作をやろうとしても、そんな解はもうないことがわかる。) この m 個が一次独立であることは、ある定理から保証されている。従って、 m 重解の固有値に対してこのような m 個の

一次独立なベクトル（その固有値に属する広義固有空間の基底）が得られるのである。各固有値に対してこの方法で重複度分の列ベクトルが得られるから、 n 個の一次独立なベクトルを得る。これらを並べて P と置くと、固有値 λ_j に対して、

$$(A - \lambda_j I)p_i^{(j+1)} = p_i^{(j)}$$

より

$$Ap_i^{(j+1)} = p_i^{(j)} + \lambda_j p_i^{(j+1)}$$

となっているから、 $P^{-1}AP$ は次の Jordan 標準形と呼ばれる上三角になるのである：

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_1(\lambda_1) \end{pmatrix}$$

ただし、正方行列 J_{λ_j} は、サイズが 1 なら (λ_j) のことで、サイズが 2 以上なら、

$$J_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ は異なるとは限らない）なる上三角行列でジョルダン細胞 (Jordan cell) と呼ばれる。 $J_j(\lambda_j)$ のサイズは固有値 λ_j の重複度を超えず、同じ固有値に属するジョルダン細胞のサイズの総和が重複度になる。

5. 終わりに

繰り返すようだが、行列の対角化は問題が具体的であり、学生にとって非常に取り組みやすい教材である。ところが、すべての正方行列が対角化できるとは限らないため、このトピックは中途半端な形で終わることになる。対角化というトピックを途中でやめることなく、完結させることは、学生に達成感

を与えるという意味でも重要だ。また、理論的に必須である三角化は、具体的な練習問題に取り組み難い。ジョルダン標準形は、これら両方の欠点を解消してくれるので、筆者は対角化の後、すぐにジョルダン標準形を教えることを勧めるのである。これは連立方程式の練習になることはもちろん、もし学生が理論的な疑問を発せば、それこそ教育的であり、理論を発展させるチャンスと考える。(広義固有空間の一般論、最小多項式、単因子論等)

最後に、三角化で重要な定理に、すべての正方行列はユニタリー行列で三角化できる (シユアーの定理) がある。行列 A のジョルダン標準形 J とその変換行列 P を求めてから、 P の列ベクトルを基にグラムシュミットの正規直交化法を使って、ユニタリー行列で三角化する練習なども非常に有益な教材と考える。具体例は省略するが、その正規直交基底を並べた行列を U とすれば、ある正則な上三角行列 S があって $U = PS$ と書ける。また、 $J = SS^{-1}J$ と書けることに注意しておけば、

$$AU = APS = PJS = PSS^{-1}JS = US^{-1}JS$$

となる。ここで、 $T := S^{-1}JS$ も依然上三角行列だから、ユニタリー行列による三角化

$$U^{-1}AU = {}^tU^{-1}AU = T$$

(tU は U の転置行列) を得るのである。 $T = S^{-1}JS$ を求めることも行列計算の練習となるし、ジョルダン標準形 J が崩れてどのような上三角行列 T が現れるか、実例で確かめるのは楽しいことと筆者は考える。

参考文献

- [1] 佐武一郎, 線型代数学, 裳華房, 1980
- [2] 入江昭二, 線形数学 I, II, 共立出版, 1969
- [3] 木村達雄, 竹内光弘, 宮本雅彦, 森田 純, 明解 線形代数, 日本評論社, 2005
- [4] 対馬龍司, 線形代数学講義, 共立出版, 2007
- [5] Gilbert Strang, Linear Algebra, Wellesley-Cambridge press, 20034