

スライディングモード制御法による回転型倒立振子の安定化

加 賀 達 也*・木 澤 悟

Stabilization of Rotational Inverted Pendulum by Sliding Mode Control Method

Tatsuya KAGA* and Satoru KIZAWA

(平成20年11月29日受理)

This paper presents the control of an under actuated system called the Rotational Inverted Pendulum with arm and pendulum. The swing up control is to move the pendulum from its stable downward position to its unstable inverted position and balance it about the vertical. Especially, we describe about a stabilization controller for balancing mode by using sliding mode control method which has a good robustness property for disturbances. The effectiveness of the proposed control law is shown by simulations and experiments.

1. 緒言

近年、アクチュエータの数が動作関節の数よりも少ないシステムである劣駆動システムの研究¹⁾が挑戦的な課題として多く取り上げられている。これは、劣駆動システムのもつ非線形性によって、一般的な制御理論が適用できないことに起因している。劣駆動システムは、全駆動システムに比べてアクチュエータの数が少なく済むため、軽量化やコスト削減、省エネルギー化が可能であり、また、故障等によってアクチュエータが動作しない場合に対処できることから、宇宙ロボット等への応用が期待されている。

本研究では、劣駆動システムの一例である回転型倒立振子の振り上げ安定化制御について検討した。倒立振子の振り上げ安定化制御の研究については数多くの研究報告があるが、特に振り上げから安定化への切り替えは難しく、筆者らの過去の研究⁴⁾においても、最適レギュレータに基づくLQG制御だけでは制御器の重み関数の選定、モデルの不確かさ、パラメータ変動、実験環境などのシステムの不確定要素に対応できないことが確認された。そこで、本論文では振り上げ制御から安定化制御への切り替えにおいて、優れたロバスト性を有するスライディングモード制御を安定化制御に用いた。そして、スラ

イディングモード制御法に基づく制御手法^{2), 3)}が、外乱に対しても十分にロバスト安定であることを、シミュレーションおよび実験によって検証した。

2. システムの概要

Fig. 1 に本研究で使用した回転型倒立振子システムを示す。また、Fig. 2 に模式的なシステム構成図を示す。アームのDCギヤードモータに取り付けられたロータリーエンコーダと振り子に取り付けられたロータリーエンコーダの角度信号は、Quanser社製のMulti Q-PCI (カウンタ) を介してパソコンへと送られる。また、指令信号は制御則に基づいて

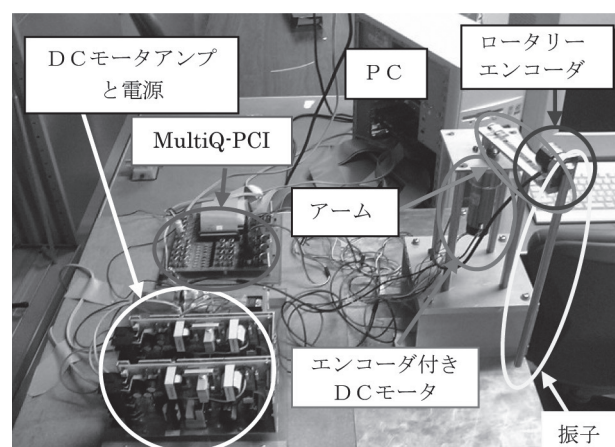


Fig. 1 回転型倒立振子システム

* 秋田高専専攻科学生

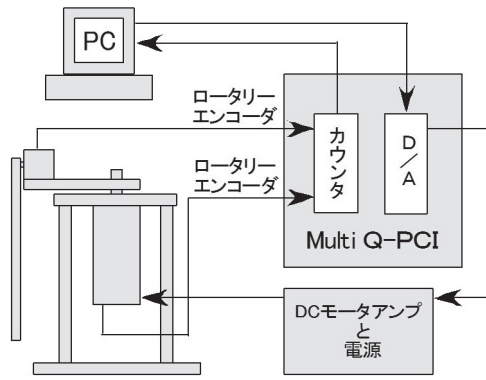


Fig. 2 システム構成図

Multi Q-PCI (D/A コンバータ) からモータアンプを介してDCモータへと送られる。

3. 回転型倒立振子のモデル化

3.1 非線形運動方程式の導出

この節では、ラグランジュの運動方程式を用いて、実験装置をモデル化したFig.3の運動方程式を導出する。モータの動特性を考慮し、アームに与えられるトルク τ とモータ端子電圧 V との関係を含めた非線形な運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} J_b + m_p r^2 + m_p l_p^2 \sin^2 a + J_m n^2 & -m_p r l_p \cos a \\ -m_p r l_p \cos a & m_p l_p^2 + I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} m_p l_p^2 \dot{a} \sin 2a & m_p r l_p \dot{a} \sin a \\ -m_p l_p^2 \ddot{\theta} \sin a \cos a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} C_a + K_T K_E n^2 & 0 \\ R_a & \\ 0 & C_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_p g l_p \sin a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_T n \\ R_a \\ 0 \end{bmatrix} V
 \end{aligned} \quad (1)$$

θ : アーム角度 α : 振子角度
 m_a : アーム質量 m_p : 振子質量
 r : アーム長さ l : 振子長さ
 r_a : アームの重心までの長さ
 l_p : 振子の重心までの長さ
 I_a : アームの重心まわりの慣性モーメント
 I_p : 振子の重心まわりの慣性モーメント
 J_b : I_a と取り付け部品を含めた慣性モーメント

c_a : アームの粘性摩擦係数
 c_p : 振子の粘性摩擦係数
 J_m : モータの慣性モーメント
 τ : モータトルク n : ギヤ比
 K_E : 誘起電圧定数 K_T : トルク定数
 R_a : 直流抵抗 (アマチュア抵抗) g : 重力加速度
 V : モータ端子電圧

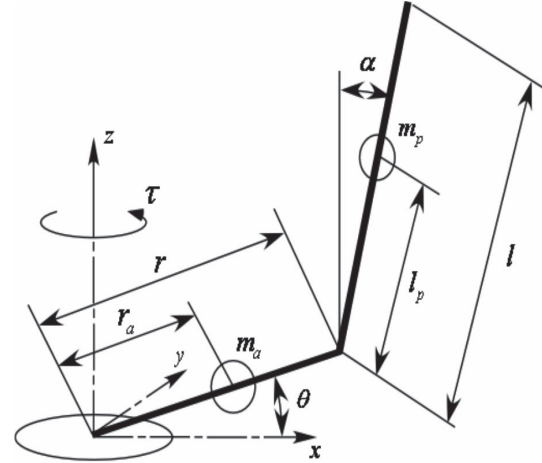


Fig. 3 回転型倒立振子モデル

また、実測、実験によって測定したアームと振子の物理パラメータおよびDCモータのパラメータをTable 1~3に示す。

Table 1 アームの物理パラメータ

記号	物理パラメータ	数値
m_a	アーム質量	0.0559 [kg]
r	アーム長さ	0.138 [m]
r_a	アームの重心までの長さ	0.069 [m]
I_a	アーム重心まわりの慣性モーメント	9.29×10^{-5} [kg・m ²]
c_a	アームの粘性摩擦係数	1.29×10^{-3} [kg・m ²]
J_b	I_a と取り付け部品を含めた慣性モーメント	1.76×10^{-3} [kg・m ²]

Table 2 振子の物理パラメータ

記号	物理パラメータ	数値
m_p	振子質量	0.067 [kg]
l	振子長さ	0.318 [m]
l_p	振子の重心までの長さ	0.1585 [m]
I_p	振子重心まわりの慣性モーメント	7.48×10^{-4} [kg・m ²]
c_p	振子の粘性摩擦係数	1.158×10^{-4} [kg・m ²]

Table 3 DC モータのパラメータ

記号	物理パラメータ	数値
J_m	モータの慣性モーメント	$2.19 \times 10^{-6} [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
n	ギヤ比	29.47
K_E	誘起電圧定数	$3.06 \times 10^{-2} [\text{V}/(\text{rad/s})]$
K_T	トルク定数	$3.038 \times 10^{-2} [\text{Nm/A}]$
R_a	直流抵抗 (アマチュア抵抗)	5.7 $[\Omega]$

3.2 運動方程式の線形化

緒言で述べたように、振子の動作領域を非線形領域と線形化可能領域の二つに分けて制御を行なった。制御方法としては、非線形領域ではON-OFF制御による振り上げ制御、線形化可能領域ではスライディングモード制御による安定化制御を行った。本研究の目的は、振子を安定倒立させること、すなわち平衡である $a=0$ [rad], $\dot{a}=0$ [rad/s] に漸近安定させることである。そこで、平衡点近傍の領域内における回転型倒立振子の状態方程式を、式(1)の運動方程式を線形化して、次のように導出する。

$$\begin{cases} \dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \\ y_p = C_p x_p \end{cases} \quad (2)$$

ここで、

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ E^{-1} A_2 & E^{-1} A_1 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 1} \\ E^{-1} B \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} J_b + m_p r^2 + J_m n^2 & -m_p r l_p \\ -m_p r l_p & I_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -c_a - \frac{K_T K_E n^2}{R_a} & 0 \\ 0 & -c_p \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_p g l_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K_T n \\ R_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_p = [\theta \ a \ \dot{\theta} \ \dot{a}]^T$$

$$u = V$$

である。

4. スライディングモード制御の設計

4.1 最適な切換超平面の設計

状態量を平衡点に漸近安定化するスライディングモード制御法について述べる。スライディングモード制御は、切換超平面を設計し、この超平面に状態を拘束させる制御入力を求めることである。そのため、超平面は安定であることが必要であり、本研究では、切換超平面に対し最適切換超平面の設計を用いた。平衡点近傍であるシステム、式(2)を次のように変換する。

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (3)$$

$$B_p = [B_1^T \ B_2^T]^T, \det B_2 \neq 0 \quad (4)$$

また、正準系への座標変換行列によって式(3)を変換する。つまり

$$x = T^{-1} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T^{-1} z, \quad z_1 \in R^3, \quad z_2 \in R \quad (5)$$

$$T = \begin{bmatrix} I_3 & -B_1 B_2^{-1} \\ 0_{1 \times 3} & I \end{bmatrix} \quad (6)$$

を用いると、

$$\dot{z} = \bar{A} z + \bar{B} u \quad (7)$$

となる。ただし

$$\bar{A} = T A_p T^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = T B_p = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$z = [z_1 \ z_2]^T$$

また、切換関数は

$$\sigma = S z = [s_1 \ s_2] z \quad (8)$$

とする。

次に、変換されたシステム式(7)に対して、スライディングモード制御になってからの状態の変動を最小にする最適な切換超平面を求めるために、レギュレータ問題に帰着させた。そこで、次の評価関数を導入する。

$$J = \int_{t_0}^t z^T Q z dt \quad Q \in R^{4 \times 4} \quad (9)$$

ただし、重み関数 Q は、

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad Q_{12}^T = Q_{21}$$

であり, t_s は状態がスライディングモードを生じ始めたときの時刻である。このとき式(9)は,

$$J = \int_{t_s}^t (z_1^T Q_{11} z_1 + 2z_1^T Q_{12} z_2 + z_2^T Q_{22} z_2) dt \quad (10)$$

となる。ここで, 補助変数 v

$$v = z_2 + Q_{22}^{-1} Q_{12}^T z_1 \quad (11)$$

を導入すれば, 式(10)の評価関数は,

$$J = \int_{t_s}^t (z_1^T \dot{Q}_{11} z_1 + v^T Q_{22} v) dt \quad (12)$$

$$\dot{Q}_{11} = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T$$

となる。このとき, 式(7)より z_1 に関する方程式は,

$$\dot{z}_1 = \tilde{A}_{11}^* z_1 + \tilde{A}_{12}^* v \quad (13)$$

となる。ただし,

$$\tilde{A}_{11}^* = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T$$

である。式(12), (13)は最適制御問題の形をしており, 最適な切換超平面の傾き S を求めるために, 式(12), (13)を解く。評価関数式(12)を最小とする解は

$$P \tilde{A}_{11}^* + \tilde{A}_{11}^{*T} P - P \tilde{A}_{12} Q_{22}^{-1} \tilde{A}_{12}^{*T} P + \dot{Q}_{11}^* = 0 \quad (14)$$

のリカッチ方程式の正定対称唯一解 P を用いて

$$v = -Q_{22}^{-1} \tilde{A}_{12}^{*T} P z_1 \quad (15)$$

と与えられ, 式(11)より

$$z_2 = -Q_{22}^{-1} (\tilde{A}_{12}^{*T} P + Q_{12}^T) z_1 \quad (16)$$

が求められる。よって, 切換超平面は式(8)で与えられているので, 式(16)の結果を用いて切換関数は

$$\begin{aligned} \sigma &= (\tilde{A}_{12}^{*T} P + Q_{12}^T) z_1 + Q_{22} z_2 \\ &= [\tilde{A}_{12}^{*T} P + Q_{12}^T \quad : \quad Q_{22}] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= [S_1 \quad : \quad S_2] z \end{aligned} \quad (17)$$

となり, これより超平面の傾き S が求まる。つまり

$$S = [\tilde{A}_{12}^{*T} P + Q_{12}^T \quad : \quad Q_{22}] \quad (18)$$

と設計され, スライディングモードを生じさせると評価関数 J を最小にする制御系を構成することができる。

4.2 スライディングモードコントローラ的设计

前節では超平面の設計について述べたので, この

節では超平面に状態を拘束させる, つまり $\sigma = 0$ となるための制御側の設計について述べる。本研究では, σ の候補としてリアプノフ関数を利用して制御系を設計する。そこで,

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma \quad (19)$$

とおき, 式(19)の時間微分は次式となる。

$$\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T S \tilde{A} z + \sigma^T S \tilde{B} z \quad (20)$$

一般に最終スライディングモード制御入力は, 線形状態フィードバック制御項 u_l と非線形制御項 u_{nl} の二つの独立項から構成される。すなわち制御則は,

$$u = u_l + u_{nl} = -Fz - k \frac{\sigma}{\|\sigma\|}, \quad k > 0 \quad (21)$$

であり, ただし

$$F = (S\tilde{B})^{-1} S\tilde{A} \quad (22)$$

である。次に, 式(21)の制御則によるスライディングモードの存在条件は以下のとおりである。式(20)に式(21)を代入すると

$$\dot{V} = -k S\tilde{B} \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|} \quad (23)$$

となる。ただし k は設計パラメータである。したがって, $S\tilde{B} > 0$ のとき $k > 0$ とすれば, 式(23)は $\dot{V} < 0$ となり, $\sigma \rightarrow 0$ となる。さらに, 式(8), (17), (18)より, $t \rightarrow \infty$ のとき $z \rightarrow 0$ となり, 式(5)より元 x_p の状態量がゼロに収束する。これより, 制御則式(21)は状態量の漸近安定が可能である。

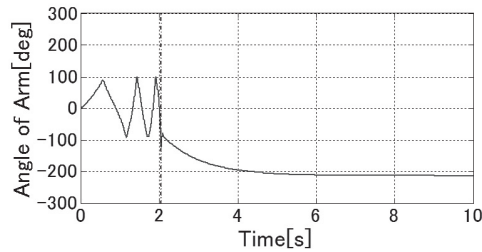
4.3 チャタリングの回避

制御則式(21)は, 第2項が不連続な切換関数となっており, 切換面近傍 ($\sigma \doteq 0$) において, チャタリングと呼ばれる高周波振動を生じてしまう。そこで, 微小項 $\delta > 0$ を導入して関数を平滑化する。新たな制御則を次式とする。

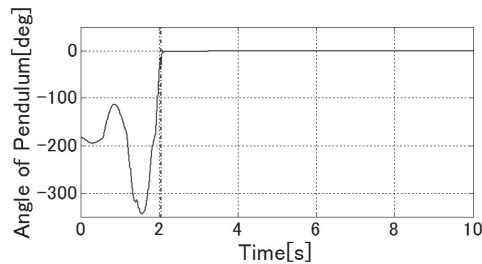
$$u = -(S\tilde{B})^{-1} S\tilde{A} z - k \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \delta} \quad (24)$$

5. シミュレーション結果

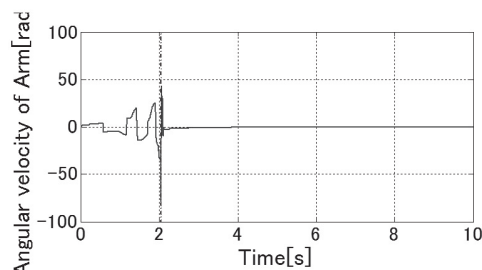
第4章で設計した制御則を検証するため, シミュレーションを行なった。制御則の設計パラメータ Q , k , δ はそれぞれ



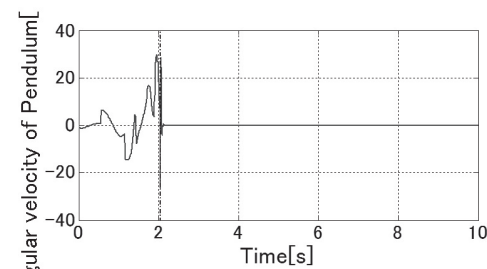
(a) アーム角度



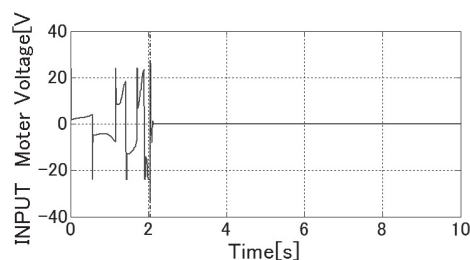
(b) 振り角度



(c) アーム角速度



(d) 振り角速度



(e) 入力電圧

Fig. 4 シミュレーション結果

$$Q = \text{diag.} [100 \quad 1 \quad 2000 \quad 1]$$

$$k = 0.001, \quad \delta = 0.5$$

とし、最適な切換超平面 S を設計した。その結果、切換超平面 S は

$$S = [-10.0, \quad 101.9, \quad -45.04, \quad 1.0]$$

と求められた。シミュレーションソフトには MATLAB/Simulink を用いて行い、振り上げ制御から安定化制御への切り換えは、振り角度が真上から $\pm 15^\circ$ 以内に進入するタイミングで行った。アーム角度 θ 、振り角度 α 、アーム角速度 $\dot{\theta}$ 、振り角速度 $\dot{\alpha}$ 、そして、モータ入力電圧 V の時間応答をそれぞれ Fig. 4(a)~(e) に示す。図中の 2sec 付近の線は、スライディングモードへの切り替えを示している。Fig. 4 より、アーム角速度、振り角度および振り角速度は 0 に漸近して拘束されており、振子が漸近安定化されていることが確認できる。しかし、アーム角度のみが 0° に漸近せず、およそ -200° 付近で定常状態となっている。モータ入力電圧においても許容入力電圧は ± 25 [V] 以内なので、弱冠許容範囲を超えている。

6. 実験結果

シミュレーションの結果と比較検討するために、前節で設計した制御則を MATLAB/Simulink でプログラミングし、デジタルマルチコントローラ Multi Q-PCI を用いて制御則を実装した。制御則のブロック線図を Fig. 5 に示す。その結果を Fig. 6 に示す。Fig. 6(a)~(e) は、それぞれ、アーム角度 θ 、振り角度 α 、アーム角速度 $\dot{\theta}$ 、振り角速度 $\dot{\alpha}$ 、そして、モータ入力電圧 V である。シミュレーション結果との違いとして、図よりアームが一定の速度をもって回転し続けていることがわかる。一方、振子は鉛直方向真上に倒立し、安定化が図られていることがわかる。また、入力電圧を見る限り、スライディングモード制御では、不連続関数を式 (24) のように設定して平滑化しているものの、実際には切換制御を行なっているため、振動的な応答を示していることがわかる。また、アーム角度を一定の位置に保持するためには、アーム角度に対してサーボ系を構成して制御則を再設計すれば、一定位置での倒立振子の安定化制御が実現できると考えられる。

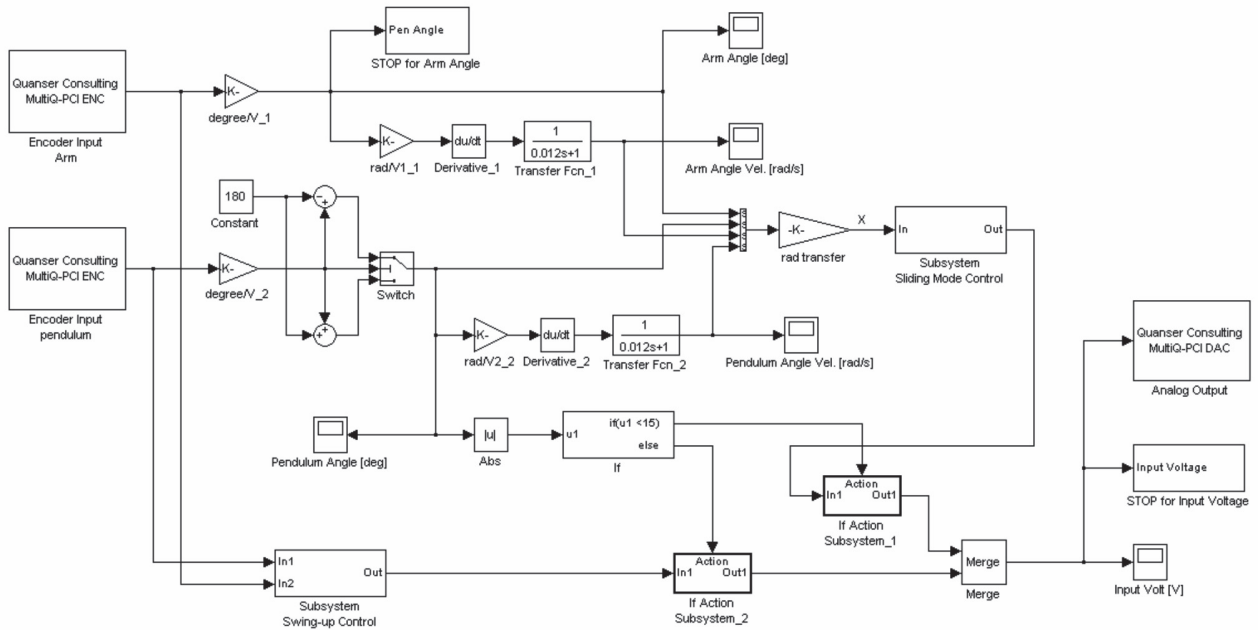
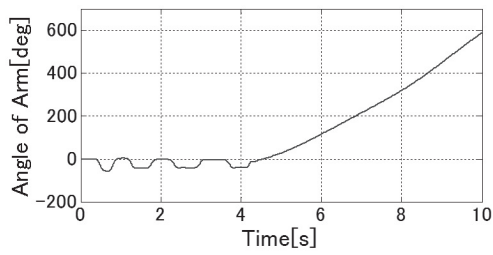
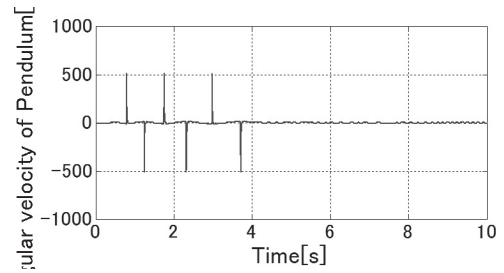


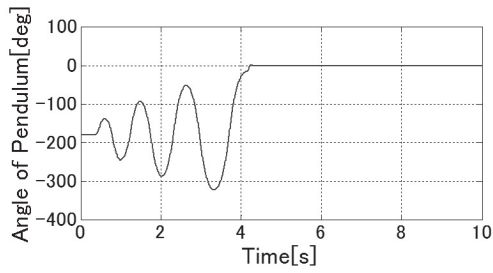
Fig. 5 制御則のブロック線図



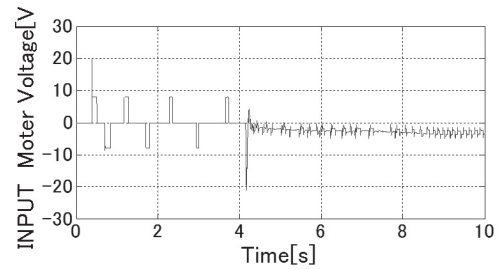
(a) アーム角度



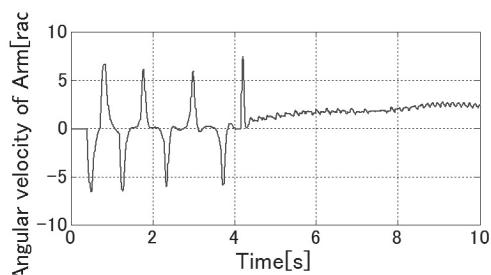
(d) 振り角速度



(b) 振り角度



(e) 入力電圧



(c) アーム角速度

Fig. 6 実験結果

7. 結言

本論文では、回転型倒立振子の制御において、制御領域を「振り上げ領域」と「安定化領域」に分け、特に安定化領域においてスライディングモード制御を適用し、設計した制御則の有効性をシミュレーションおよび実機実験により検討した。その結果、先行研究にて行った安定化領域において適用したLQG制御よりも、スライディングモード制御の方が、振子の安定性が高いことが確かめられた。

参考文献

- 1) Spong, M, "The Swingup Control Problem for the Acrobot", IEEE control Systems Magazine, vol.15, No.1, pp. 49-55, Feb. 1995.
- 2) 野波, 田, スライディングモード制御—非線形ロバスト制御の設計理論—, コロナ社, 1994
- 3) 野波, 西村, 平田, MATLABによる制御系設計, 東京電機大学出版局, 1998
- 4) 奈良, 木澤, エネルギー法を利用した回転型倒立振子の振り上げ制御, 日本機械学会東北学生会第37回卒業研究発表講演会講演論文集, pp. 189-190, 2007