

# 指数せん断流中に置かれた超空洞翼の揚力線解析

中 村 豪\*・伊 藤 惇

## Lifting-Line Analysis of Supercavitating Hydrofoil in Exponential Shear Flow

Goh NAKAMURA\* and Jun ITO

(2001年11月28日受理)

A lifting-line analysis of a wing in an exponential shear flow is performed. The governing equation due to Chen et al. is reduced to two ordinary differential equations by separation of variables, and a general solution is obtained by linearly combining the fundamental solutions. An induced attack angle is derived from the general solution and a condition of far downstream, and a relation of a lift force to an effective attack angle is described by the Taylor series expansion in the vicinity of a geometrical attack angle. From the induced attack angle and the lift force, a lifting-line equation is derived, and solved by the Gaussian elimination method. By applying the analytical method to a supercavitating hydrofoil, the effects of shear parameter, cavitation number and aspect ratio are clarified through numerical calculations.

### 1. 緒 言

せん断流中において空洞現象を伴う翼の三次元理論として、流体力と空洞分布の両方の特性が比較的容易に得られることから揚力線理論による解析を行ってきた<sup>(1~4)</sup>。しかしながらこれらの研究はいずれも、「軸流機械の羽根をよぎる内部流れ」を近似した「平行2平面間に置かれた翼のまわりのせん断流」を対象としたものである。

一方無限に広がるせん断流中の翼の揚力線理論としては、Karman-Tsien<sup>(5)</sup>、Chen-Mangione<sup>(6)</sup>、平野<sup>(7)</sup>によるものなどがある。Karman-Tsienは基礎的な理論を展開しているが具体的な計算は行っていない。Chen-Mangioneは垂直上下方向に指数関数的に変化するせん断流を扱っているが、楕円型の揚力分布を与え誘導抗力を求めているに過ぎない。また平野は垂直上下方向に任意の速度分布を許す鏡像法を展開しているが、離散解法であるため解の見通しあまり良くない。

このようなことから本研究は、無限流体中の超空洞翼に及ぼすせん断流の影響を明らかにすることを目的として、翼面に垂直な上下方向に指数関数分布

をしていて、翼幅方向には一様でかつ無限に広がっているせん断流（以下単に指数せん断流と言う）を主流とし、この中にある三次元翼に対し揚力線理論を組み立て、これを超空洞翼に適用し、流体力特性および空洞特性に及ぼす主流のシアパラメータ、キャビテーション係数、アスペクト比の影響を明らかにする。

### 2. 支配方程式<sup>(5,6)</sup>

主流を  $U(y, z)$ 、流体密度を  $\rho$ 、無限下流におけるじょう乱速度の  $y$  成分、 $z$  成分を  $v_\infty$ 、 $w_\infty$  とする。これらのじょう乱速度には速度ポテンシャル  $\phi$  が存在して次式が成り立つ。

$$v_\infty = \frac{1}{\rho U} \frac{\partial \phi}{\partial y} \dots\dots\dots(1)$$

$$w_\infty = \frac{1}{\rho U} \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(2)$$

またこの速度ポテンシャル  $\phi$  について次の支配方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{U^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{U^2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

翼を揚力線で近似すると次の境界条件が成立する。

\* 秋田高専専攻科学生

(i) 両翼端

$$\phi = 0; y = 0, b \dots\dots\dots(4)$$

(ii) 無限遠

$$\phi = 0; |z| \rightarrow \infty \dots\dots\dots(5)$$

(iii) 揚力線上

$$\phi = \pm \frac{1}{2} l_f(y); z = \pm 0 \dots\dots\dots(6)$$

ここでは  $l_f(y)$  翼幅方向揚力分布である。

本研究では、主流の速度分布は翼面に垂直な上下方向にのみ変化を許すものとし、次式のような指数関数分布を仮定する (図1)。

$$U(z) = U_0 e^{kz} \dots\dots\dots(7)$$

よって、式(3)に式(7)を代入することにより、支配方程式として

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

が導かれる。

3. 変数分離解

式(8)を解くために変数分離解

$$\phi = Y(y)Z(z) \dots\dots\dots(9)$$

を予想すると、

$$\frac{Z''}{Z} - 2k \frac{Z'}{Z} = -\frac{Y''}{Y} \dots\dots\dots(10)$$

これを  $\lambda^2$  とおくと次の2種の微分方程式が成り立つ。

$$Z'' - 2kZ' - \lambda^2 Z = 0 \dots\dots\dots(11)$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0 \dots\dots\dots(12)$$

境界条件式(5)すなわち  $|z| \rightarrow \infty$  で  $Z = 0$  より、

$$Z = C_1 e^{(k - \sqrt{k^2 + \lambda^2})z} \quad (z > 0) \dots\dots\dots(13)$$

境界条件式(4)すなわち  $y = 0, b$  で  $Y = 0$  より

$$Y = C_2 \sin \lambda y \dots\dots\dots(14)$$

ここで  $\lambda$  は

$$\lambda = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(15)$$

式(9)(13)(14)から解の重ね合わせにより一般解は次のように表される。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda) e^{(k - \sqrt{k^2 + \lambda^2})z} \sin \lambda y \dots\dots\dots(16)$$

4. 揚力線方程式

揚力線位置  $(0, y, 0)$  における誘導迎角  $\alpha_i$  は、同じ位置における誘導速度の  $z$  成分  $w_o$  から次式で与えられる。

$$\alpha_i = w_o / U_0 \dots\dots\dots(17)$$

無限下流における誘導速度を  $w_\infty$  とすると次式の関係が成り立つ<sup>(6)</sup>。

$$w_o = w_\infty / 2 \dots\dots\dots(18)$$

よって、式(16)を式(2)に代入し  $z \rightarrow 0$  の極限值を取り、式(17)(18)を用いると誘導迎角  $\alpha_i$  は次式のようになる。

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{2\rho U_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda) (k - \sqrt{k^2 + \lambda^2}) \sin \lambda y \dots\dots(19)$$

迎角として有効迎角  $\alpha_e$  を取れば、任意断面の揚力分布  $l_f(y)$  について通常の揚力線理論と同じように二次元の関係が成り立つものと仮定すると、次式のように置くことができる。

$$l_f(y) = \frac{1}{2} \rho c(y) U_0^2 C_{l2} \{ \alpha_e(y), k \} \dots\dots\dots(20)$$

ここで  $c(y)$  は翼弦長分布、 $C_{l2}$  は揚力係数の二次元値で、有効迎角  $\alpha_e$ 、シアパラメータ  $k$  の関数である。

空洞を伴う流れでは、迎え角の変化と共に空洞長さが変化するため、迎え角と揚力係数の間に線形性は成立しない。よって空洞流れに拡張できるように  $C_{l2}$  と  $\alpha_e$  の関係には幾何迎角  $\alpha$  の近傍でテイラー展開した次式を用いる。

$$C_{l2} \{ \alpha_e(y), k \} = C_{l2} \{ \alpha(y), k \} + \frac{\partial}{\partial \alpha} C_{l2} \{ \alpha(y), k \} \alpha_i(y) + \dots\dots\dots(21)$$

ただし、有効迎角  $\alpha_e$  は次式で与えられる。

$$\alpha_e(y) = \alpha(y) + \alpha_i(y) \dots\dots\dots(22)$$

式(6)と式(16)より  $z > 0$  を考えると

$$l_f(y) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\lambda) \sin \lambda y \dots\dots\dots(23)$$

式(21)を式(20)に代入し、式(21)の二次以上の項を無視すると、

$$l_f(y) = \frac{1}{2} \rho c(y) U_0^2 [ C_{l2} \{ \alpha(y), k \} + \frac{\partial C_{l2}}{\partial \alpha} \{ \alpha(y), k \} \alpha_i(y) ]$$

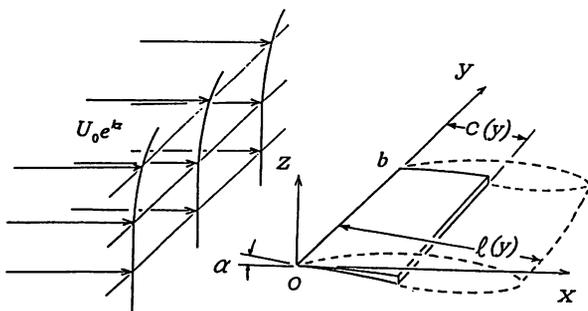


図1 座 標

$$+\frac{\partial}{\partial \alpha} C_{i2}\{\alpha(y), k\} \cdot \alpha_i(y)] \dots\dots\dots(24)$$

ここで式(24)に式(19)と式(23)を代入すると揚力線方程式が導かれ、次のようになる。すなわち、

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\lambda) \sin \lambda y \left\{ 1 - \frac{1}{8} C_{i2,\alpha}(y) c(y) (k - \sqrt{k^2 + \lambda^2}) \right\} = \frac{1}{4} c(y) C_{i2}(y) \dots\dots\dots(25)$$

ただし、

$$C_{i2}(y) = C_{i2}\{\alpha(y), k\} \dots\dots\dots(26)$$

$$C_{i2,\alpha}(y) = \frac{\partial}{\partial \alpha} C_{i2}\{\alpha(y), k\} \dots\dots\dots(27)$$

$$F_n(\lambda) = \frac{f_n(\lambda)}{\rho U_o^2} \dots\dots\dots(28)$$

と置くものとする。

式(25)の揚力線方程式の解  $F_n(\lambda)$  を求めるためには、まず与えられた幾何迎角  $\alpha(y)$  とシアパラメータ  $k$  に対する揚力係数  $C_{i2}$  と揚力傾斜  $C_{i2,\alpha}$  の二次元値をあらかじめ求めておく必要がある。これには既存の二次元翼理論<sup>(8)</sup>を用いればよい。

翼幅中央位置に関する流れの対称性から式(15)の  $n$  を奇数とし、翼幅上の標点数を30として30元連立方程式を作り、ガウスの消去法で  $F_n$  を求める。

また、標点位置の座標は次式による。

$$y_i = \frac{b}{31} i (i=1, 2, \dots, 30) \dots\dots\dots(29)$$

### 5. 特 性

翼幅方向揚力係数分布  $C_e(y)$  を次式のように定義する。

$$C_e(y) = \frac{2 \ell_f(y)}{\rho c(y) U_o^2} \dots\dots\dots(30)$$

式(23)より  $C_e(y)$  は次のようになる。

$$C_e(y) = \frac{4}{c(y)} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n(\lambda) \sin \lambda y \dots\dots\dots(31)$$

全揚力係数  $C_L$  を次のように定義する。

$$C_L = \frac{2L}{\rho U_o^2 \int_0^b c(y) dy} \dots\dots\dots(32)$$

全揚力  $L$  は局所揚力の積分により求められる。

$$L = \int_0^b \ell_f(y) dy \dots\dots\dots(33)$$

よって式(23)(32)(33)より  $C_L$  は次のようになる。

$$C_L = \frac{4}{\int_0^b c(y) dy} \int_0^b \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n(\lambda) \sin \lambda y \right\} dy = \frac{8b}{\pi \int_0^b c(y) dy} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{F_n(\lambda)}{n} \dots\dots\dots(34)$$

誘導抗力  $D_i$  は次式により得られる。

$$D_i = - \int_0^b \ell_f(y) \frac{w_o(0, y, 0)}{U_o} dy \dots\dots\dots(35)$$

誘導抗力係数  $C_{Di}$  を次式のように定義する。

$$C_{Di} = \frac{2D_i}{\rho U_o^2 \int_0^b c(y) dy} \dots\dots\dots(36)$$

式(19)(23)(35)(36)より  $C_{Di}$  は次のようになる。

$$C_{Di} = - \frac{2}{\int_0^b c(y) dy} \int_0^b \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n(\lambda) \sin \lambda y \right\} \times \left\{ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n(\lambda) (k - \sqrt{k^2 + \lambda^2}) \sin \lambda y \right\} dy = - \frac{b}{\int_0^b c(y) dy} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} F_n(\lambda)^2 \left\{ k - \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

### 6. 超空洞翼への応用

キャビテーション係数  $\sigma$  を次のように定義する。

$$\sigma = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho U_o^2} \dots\dots\dots(38)$$

ここで  $p_c$  は空洞内圧力、 $p_\infty$  は主流の圧力である。揚力係数  $C_{i2}$  は  $\alpha$ ,  $k$  の他に  $\sigma$  も変数として含むことになるから、式(25)において式(26)(27)の左辺はそれぞれ次のようになる。

$$C_{i2}(y) = C_{i2}\{\alpha(y), \sigma, k\} \dots\dots\dots(39)$$

$$C_{i2,\alpha}(y) = \frac{\partial}{\partial \alpha} C_{i2}\{\alpha(y), \sigma, k\} \dots\dots\dots(40)$$

これらの値は既存の二次元超空洞翼理論<sup>(9)</sup>を用いて算出する。

空洞分布(翼幅方向空洞長さ分布)  $\ell(y)$  は著者らによる既存の方法<sup>(4)</sup>により求められる。

数値計算は迎角  $5^\circ$  の矩形平板翼について行った。図2, 3, 4は翼幅方向の揚力係数分布を示している。図2よりシアパラメータ  $k$  が大きくなるにつれ、 $C_i(y)$  は小さくなると共に平坦になって、3次元効果が小さくなる傾向を示す。これは  $k$  が大きくなることによるせん断効果の増加が、三次元効果を緩

和する働きがあることを示している。図3よりキャビテーション係数  $\sigma$  が大きくなるにつれ、 $C_l(y)$  は分布形状をあまり変えず一様に大きくなる。図4よりアスペクト比  $b/c$  が大きくなるにつれ、三次元翼で一般に見られるように  $C_l(y)$  は平坦になり二次元になる。

図5, 6は全揚力係数  $C_L$  とアスペクト比の逆数  $c/b$  の関係を示している。図5より  $c/b$  が大きくなるほどシアパラメータ  $k$  の影響が小さくなっている。これは図2とは逆に  $c/b$  が大きくなることによる三次元効果の増加がせん断効果を抑えているものと考えられる。図6よりキャビテーション係数  $\sigma$  が大きくなると、 $c/b$  にかかわらず  $C_L$  はほぼ一定割合で大きくなっている。

図7, 8は誘導抗力係数  $C_{Di}$  とアスペクト比の逆数  $c/b$  の関係を示している。図7よりシアパラメータ  $k$  が小さくなるにつれて  $C_{Di}$  は大きくなり、 $c/b$  の減少と共に零に近づく。図8より、キャビテーション係数  $\sigma$  が大きくなると、 $C_{Di}$  は  $c/b$  に無関係にほぼ一定割合で大きくなっている。

図9, 10は翼幅方向空洞長さ分布  $l(y)/c$  を示す。図9よりシアパラメータ  $k$  が大きくなると  $l(y)/c$  は平坦になり、三次元効果が小さくなっている。これは揚力係数分布  $C_l(y)$  にも見られた傾向である。図10よりキャビテーション係数  $\sigma$  が大きくなると  $l(y)/c$  は小さくなる傾向を示す。

図9, 10で翼端までカーブが描かれていないのは以下の理由による。式(19)から明らかなように両翼端 ( $y = 0, b$ ) で誘導迎角  $\alpha_i(y)$  は零になり、理論上空洞長さは二次元値を取る。このように翼端に向か

って減少する傾向にある空洞長さが、翼端で急に二次元値を取るの物理的に正しい現象を表していない。このパラドックスは、翼幅上の任意点で  $l(y)/c$  と有効迎角  $\alpha_e(y)$  の間に仮定した二次元の関係が、翼端では成立しないことが原因と考えられる。

なお、翼幅方向空洞長さ分布についての既存実験は、一様流でしかも部分空洞<sup>(10)</sup>より知見しないが、翼端側で空洞長さが小さくなる傾向は図9の  $k = 0$  と非常によく似た傾向を示す。キャビテーション係数の減少およびアスペクト比の増加と共に平均空洞長さが大きくなる傾向が、図10などの本計算結果にみられるが、一様流超空洞の実験結果<sup>(11)</sup>と定性的に一致している。

表1には式(16)(28)で定義されている  $F_n(\lambda)$  の値を示す。これは揚力線方程式(25)を4章の末尾に示す方法で解いて求めたものである。計算条件はシアパラメータ  $k = 0.5$ 、キャビテーション係数  $\sigma = 0.065$ 、アスペクト比  $b/c = 3$  である。 $n$  に伴って徐々に収束している。

### 7. 結 言

翼面に垂直な上下方向に指数関数的に変化する速度分布を有し、無限に広がっているせん断流を主流のモデルとし、その中に置かれた三次元翼に対して揚力線理論を展開し、これを超空洞翼に応用してせん断流の効果を明らかにした。

本研究の内容は以下のように要約される。

(1) Chen らによって誘導された無限下流の速度ポテンシャルに関する支配方程式が、変数分離によっ

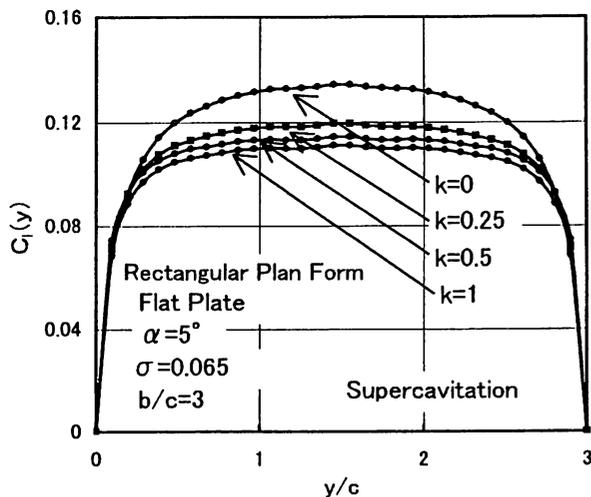


図2 局所揚力係数 (kの影響)

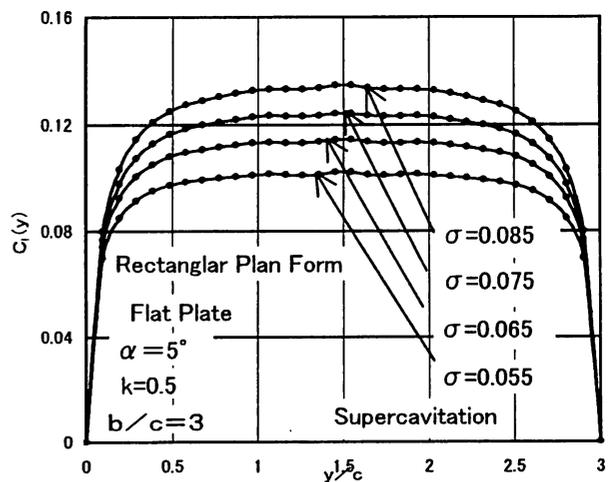


図3 局所揚力係数 (sigmaの影響)

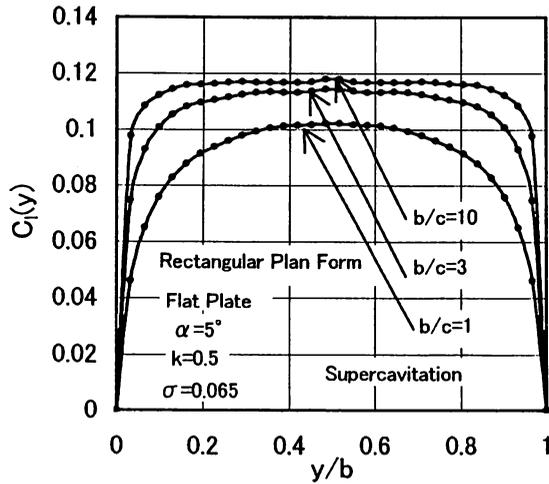


図4 局所揚力係数  
( $b/c$ の影響)

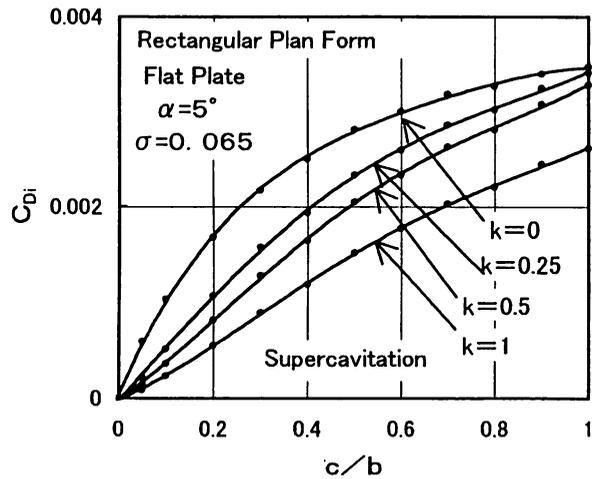


図7 誘導抗力係数  
( $k$ の影響)

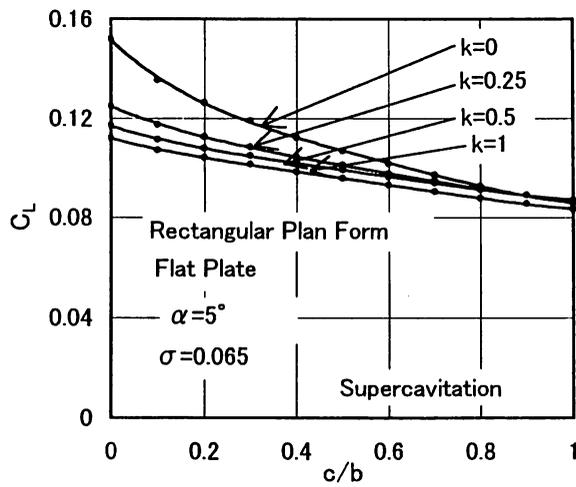


図5 全揚力係数  
( $k$ の影響)

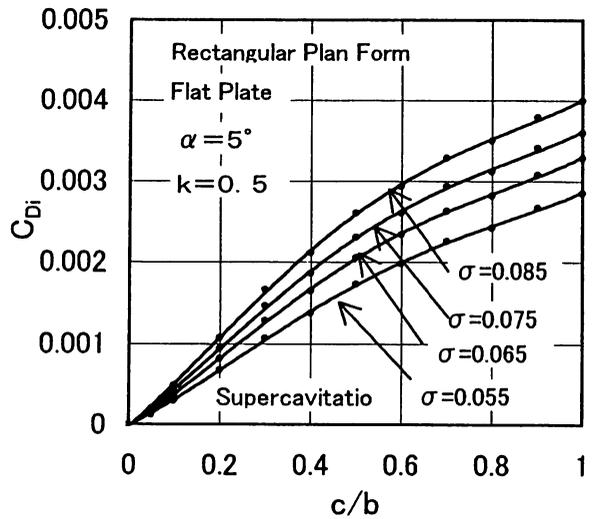


図8 誘導抗力係数  
( $\sigma$ の影響)

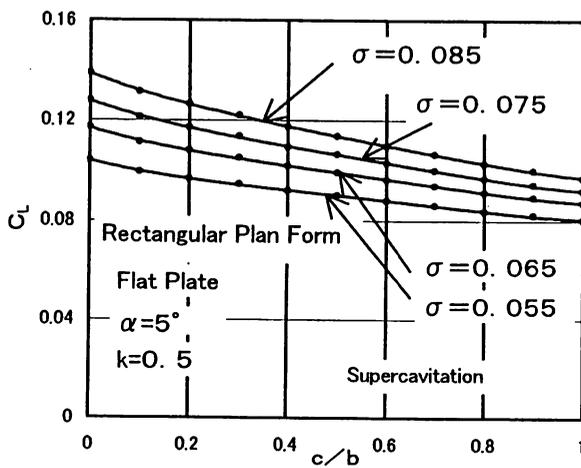


図6 全揚力係数  
( $\sigma$ の影響)

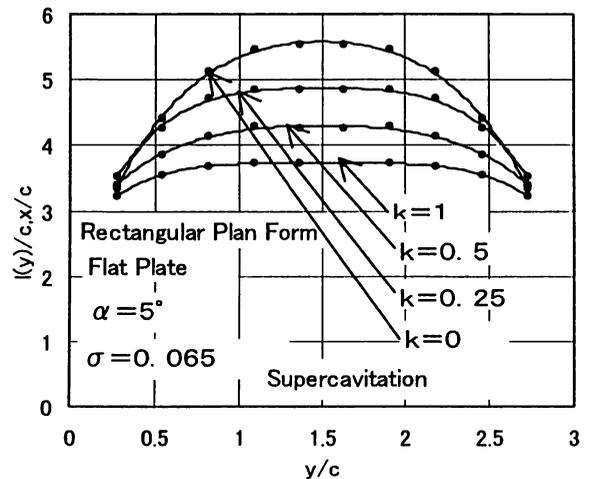


図9 空洞長さ分布  
( $k$ の影響)

指数せん断流中に置かれた超空洞翼の揚力線解析

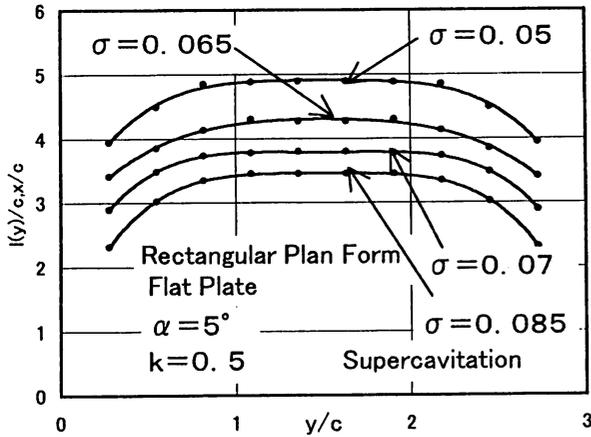


図10 空洞長さ分布  
( $\sigma$ の影響)

て解かれ、無限遠方と翼端の境界条件を満たす基本解の一次結合によって一般解が求められた。またもう一方の翼端の境界条件から固有値が決定された。

(2)局所揚力と有効迎角の関係には、線形性のない空洞流れに応用できるように幾何迎角のまわりのテイラー級数が導入された。誘導迎角を求めることにより揚力線方程式が導かれ、これは翼幅方向の選点によって連立方程式に帰着され数値的に解かれた。

(3)局所揚力係数、全揚力係数、誘導抗力係数の解析的な特性表示が得られ、計算によってこれらの特性と空洞分布が明らかにされた。また、すべての特性について、シアパラメータを大きくしてせん断効果を増加させると三次元効果が抑制されることが明らかにされた。

参考文献

(1) 伊藤・成田, 機論, 57-537(1991-5), 1635.

表1  $F_n$ の値

n	$F_n$	n	$F_n$
1	0.03529	31	0.000131
3	0.01018	33	0.000174
5	0.00529	35	0.000092
7	0.00328	37	0.000111
9	0.00229	39	0.000077
11	0.00152	41	0.000052
13	0.0013	43	0.000037
15	0.00094	45	0.000046
17	0.00076	47	0.000024
19	0.00057	49	0.000052
21	0.00046	51	-0.000023
23	0.00039	53	0.000023
25	0.00034	55	0.000006
27	0.00023	57	0.000013
29	0.00025	59	0.000017

(2) 伊藤, 機論, 57-543 (1991-11), 3783.  
 (3) 伊藤・成田・中村 (理), 機論, 59-567 (1993-11), 3393.  
 (4) 伊藤・田村・味形, 機論, 66-652 (2000-12), 3131.  
 (5) Karman, Th. & Tsien, H.S., Q. Appl. Math., 3-1 (1945), 1.  
 (6) Chen, C.F & Mangione, B.J., AIAA Journal, 5-11 (1967), 2056.  
 (7) 平野, 大分工大紀要, 4-1 (1975), 16.  
 (8) 伊藤, 機論, 57-543 (1991-11), 3778.  
 (9) 伊藤・中村 (理)・斎藤, 機論, 58-549 (1992-5), 1605.  
 (10) 右近, 日本造船学会論文集, 138 (1975), 93.  
 (11) Kermeen, R., W., J. Ship Res., 5 (1961), 22.