最適構造設計における解精度向上のための２，３の試み

藪　忠司・鎌田貴寛*

Several Methods for Improving the Analysis Results in Optimum Structural Design

Tadashi SO and Takahiro KAMADA

(1999年11月30日受理)

In optimum structural design, it is well known that optimum shapes are greatly affected not only by parameters such as penalty parameters, but also by several conditions such as boundary conditions, and authors have already reported in the Research Report of ANCT on the effects of loading conditions.

In this paper, two examples are shown where the model final shapes are not smooth due to the improperly selected initial shape, or the lack of the costraint conditions, and how they are corrected are also shown. An approach is also proposed to estimate the derivatives of an objective function more exactly, as it is very important in searching the optimum solution effectively.

1．緒　言

最適構造設計において，最終解がさまざまなパラメータや境界条件等の条件によって大きな影響を受けることはよく知られている。著者らはこの点に着目し，荷重条件の影響については既に秋田高専紀要で報告した[1]。本報では，初期条件の与え方によって最終形状が乱れる事例とその解決方法について報告する。また，最適解の探索ベクトルの値を正確に求めることはより早く最適解に到達する上で極めて重要な因子であると思われることから，これまで著者らが用いてきた近似的な手法に比べ，より精度の高い手法を示し，その結果を紹介する。

2．最適化問題の設定

最適化問題は，一般に次のように表現することができる。

「設計変数 $\boldsymbol{x}$ についての制約条件

$$g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{1}$$

$$h_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2}$$

のもとで，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最小化せよ。」

* 秋田高専専攻科学生

本研究では発生する応力値を制約値以下に抑えながらモデル体積を最小にする問題を対象としており，この場合目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ はモデル体積となる。また，設計変数 $\boldsymbol{x}$ はモデル形状を規定するパラメータ，具体的には有限要素モデルの表面の節点座標である。

応力についての不等式制約条件式としてはモデルに作用する荷重のタイプによって，例えば次のようなケースを考えることができる。

1）単一種類の荷重が作用する場合

i 番目の応力評価点に生じる応力（相当応力とする）を σ_{ei}，許容応力を σ_a とすると，

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ei} - \sigma_a \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{3}$$

ここに，m は応力評価点の数である。

2）静的荷重と繰り返し荷重が作用する場合

静的荷重によって，モデルの第 i 評価点に応力 σ_{si} が生じ，両振繰り返し荷重によって同じ点に振幅 σ_{di} の繰り返し応力が作用する場合には，疲労限度線図をこれらの組み合わせ応力に対する許容限界と考えることにより，制約条件式（応力の許容範囲）を次のような形で与えることができる。

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma_{si}}{\sigma_T} + \frac{\sigma_{di}}{\sigma_W} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{4}$$

ここに，σ_T：真破断力（または引張強さ）

σ_W：両振許容疲労限度

3． 応力解析の手法

最適化の各過程における解析モデルの応力・変形等の挙動を変位法に基づく有限要素法によって求めるものとし，モデル表面の節点座標値のうち適当なものを設計変数に選ぶと，目的関数であるモデル体積や上述の各制約条件式はいずれも設計変数の高次非線形関数になる。

本研究で有限要素解析に用いたのは，線形アイソパラメトリック4辺形要素であり，この場合実要素内の任意の点 P における座標 x，y と，x，y 方向の変位 u，v は，親要素内の点Qの座標 ξ，η と次式によって1対1に対応する（図1）。

$$x=\sum_{i=1}^{4}N_i x_i,\ y=\sum_{i=1}^{4}N_i y_i, \tag{5}$$

$$u=\sum_{i=1}^{4}N_i u_i,\ v=\sum_{i=1}^{4}N_i v_i$$

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \tag{6}$$

ここに，ξ_i，η_i，x_i，y_i，u_i，v_i はそれぞれ親要素における第 i 頂点の座標値（1か−1），実要素における第 i 節点の座標値，および節点変位値である。N_iは形状関数と呼ばれている。

平面問題におけるひずみと変位の関係式[2]に上式の u，v を代入し，節点変位のベクトルを

$$\boldsymbol{d}^e=[u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3\ u_4\ v_4]^T \tag{7}$$

で表せば，ひずみベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$ を次式で表すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}^e \tag{8}$$

ここに，

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1\ \boldsymbol{B}_2\ \boldsymbol{B}_3\ \boldsymbol{B}_4],\ \boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{9}$$

また，弾性応力マトリックス[3]を $\boldsymbol{D}$ とすれば，要素内の任意の点における応力ベクトルは

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}^e \tag{10}$$

で得られる。

さらに，仮想仕事の原理[4]にこの $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}$ を代入することにより，要素に作用している節点力ベクトル $\boldsymbol{F}^e$ と節点変位ベクトル $\boldsymbol{d}^e$ の関係が次式で得られ，

$$\boldsymbol{F}^e=\boldsymbol{K}^e\boldsymbol{d}^e \tag{11}$$

$$\boldsymbol{K}^e=\iint_s \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}t\,dxdy\ \ (t：板厚) \tag{12}$$

これを構造全体に重ね合わせることにより，全体剛性方程式

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} \tag{13}$$

が得られる。この連立一次方程式を節点変位ベクトル $\boldsymbol{d}$ について解き，次に(8)，(10)式で各要素の $\boldsymbol{\varepsilon}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ を求めれば，基本的な物理量はすべて求められることになる。

なお，上記 $\boldsymbol{K}^e$ は要素剛性マトリックスと呼ばれ，有限要素解析における基本量である。上記4辺形要素の場合，要素剛性マトリックスの積分変数を ξ，η に変換することができて，この場合，$\boldsymbol{K}^e$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{K}^e=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}|\boldsymbol{J}|\,t\,d\xi d\eta \tag{14}$$

ここで，$|\boldsymbol{J}|$ はヤコビの行列式[5]であり，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{J}$ は親要素の座標 ξ，η と節点座標の，したがって設計変数の高次非線形関数となる。なお，要素の面積 S は次式で与えられる。

$$S=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|\boldsymbol{J}|\,d\xi d\eta \tag{15}$$

(14)，(15)式の積分値は数値積分によって求める必要があり，本研究ではこれらを1方向の積分点の数を2とするガウスの数値積分法[6]によって求めている。

4． 最適化の手法

本論文では不等式制約条件のみを考えており，非線形最適化問題の解法として乗数法[7]を用いている。

乗数法は制約条件式ごとに異なるペナルティパラメータ t_i と $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ を導入して目的関数に組込み，

$$F(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2t_i}[\max\{0,\lambda_i+t_i g_i(\boldsymbol{x})\}^2-\lambda_i^2] \tag{16}$$

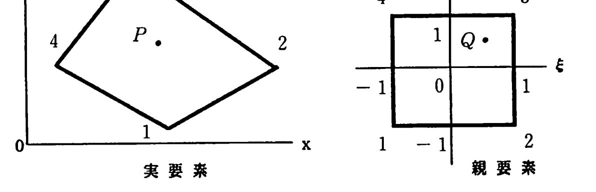


図1　4辺形要素に対する親要素と実要素

を拡張目的関数と考えてその制約なし最適化とペナルティパラメータの修正を繰返し行う手法である。ペナルティ外点法[8]ではペナルティ量を大きくするにつれ，制約領域の境界にけわしい崖が形成され，これが最適解の探索を困難にするという欠点があるが，乗数法はこれを緩和する手法であり，より優れた最適化手法であると考えることができる。

前章で設定した最適化問題を，有限要素法と乗数法の組合せによって解く大まかなフローを示すと以下の通りである。

1）ペナルティパラメータと設計変数 $\boldsymbol{x}$ の初期値（モデル初期形状）を設定する。
2）有限要素解析を行って，各応力評価点での応力，モデル体積を求めるとともに，その形状における最適解の探索方向 $\boldsymbol{p}$ を決定する。探索方向は最適化の過程でどのような手法を用いるかによって異なるが，本研究では勾配法の中で一番基本的な最急降下法[9]を用いており，したがって，探索方向は拡張目的関数を各設計変数で偏微分して得られる勾配ベクトルと逆方向のベクトルとなる。
3）探索方向 $\boldsymbol{p}$ を固定した状態で，歩み幅 α のみを種々変えて探索を繰り返し，その方向で拡張目的関数 F が最小となるような $\alpha=\alpha_{\min}$ を決定する。
4）$\boldsymbol{x}+\alpha_{\min}\boldsymbol{p}$ を新しい設計変数として，2）に戻る。なお，3）のステップで拡張目的関数の最小値が予め与えられた収束判定条件を満たした時は，ペナルティパラメータを更新してからステップ2）に戻る。

　また，ペナルティパラメータについての収束条件が満たされた時には最適解が得られたと判断し，解析を終了する。

5．　解精度改善のための試み

著者らは上記の方法により，これまで各種平面モデルに対して最適形状を求めて来ており，最終解が初期形状やペナルティパラメータの選び方などに極めて敏感であることを学んだ。以下では最終解を改善するために行った2，3の試みを紹介する。

5．1　拡張目的関数の偏微分の算定法

最適解の探索に最急降下法のような勾配法を用いる場合，各ステップでの探索方向を得るために拡張目的関数の勾配を求める必要がある。

この勾配を得るために当初用いていた方法は次のような近似的な方法である。

1）ある基準となる形状のもとで，有限要素解析を実施し，その時のモデル体積と応力評価点での応力値を求めて，それをもとに拡張目的関数 F の値を計算する。
2）次に設計変数として選ばれた節点座標のうちの1つ x_i（$i=1,2,\cdots,m$，m：設計変数の数）を微小量 δ だけ変化させ，その形状に対して改めて有限要素解析を実施し，得られた結果から拡張目的関数 F' を求める。
3）$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\fallingdotseq\frac{F'-F}{\delta} \tag{17}$$
と考える。

この方法は手軽ではあるが，δ を小さくし過ぎると，数値誤差の影響が大きくなり，また大きくし過ぎると近似精度が落ちるという問題点があった。

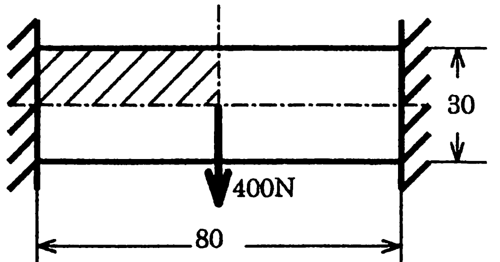
そこでより厳密な算定方法に改めることにした。拡張目的関数にはモデル体積 V と評価点の応力値が含まれているので，これらのそれぞれについて設計変数による偏微分値を求める必要があるが，前者の導出は極めて容易であるので，以下では任意の評価点の応力値を設計変数で偏微分する場合の手順のみを示すことにする。

1）任意の応力評価点の応力ベクトルは
$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{DBd}^e \tag{10}$$
で与えられるので，これを任意の設計変数 x_i で偏微分すると，
$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial x_i}=\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_i}\boldsymbol{d}^e+\boldsymbol{DB}\frac{\partial\boldsymbol{d}^e}{\partial x_i} \tag{18}$$
このうち，$\boldsymbol{B}$ マトリックスは(9)式の形から予想されるように節点座標の陽な関数であるので，これを設計変数で偏微分するのは容易である。
2）右辺第2項の偏微分を求めるために，荷重が形状変化の影響を受けないとして，モデル全体に対する剛性方程式
$$\boldsymbol{Kd}=\boldsymbol{F} \tag{13}$$
の両辺を設計変数 x_i で偏微分すれば，
$$\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial x_i}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{d}}{\partial x_i}=0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{d}}{\partial x_i}=-\frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial x_i}\boldsymbol{d} \tag{19}$$
3）全体剛性マトリックス $\boldsymbol{K}$ は要素剛性マトリック

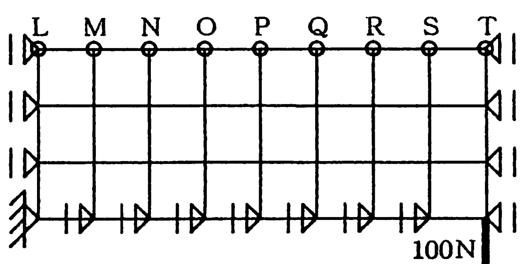
ス $\boldsymbol{K}^e$ を要素の数だけマトリックス的に重ね合わせたものであり，また要素剛性マトリックスは(14)式に示されるように $\boldsymbol{B}$ と $|\boldsymbol{J}|$ で構成されていて，これらは設計変数（節点座標）の陽な関数であるから，求める過程で数値積分は必要となるが，偏微分形を比較的容易に導くことができる。

4）そこで，(19)式の右辺が全体剛性方程式(13)式の荷重項に対応していると考えて，(19)式を解けば，$\partial \boldsymbol{d}/\partial x_i$ の値が得られる。この中から設計変数 x_i が所属している要素の４つの節点に対応する項を選び出せば，これが(18)式の右辺の $\partial \boldsymbol{d}^e/\partial x_i$ となる。したがって，(18)式を，すなわち応力値の設計変数による偏微分値を求めることができる。

例として図２に示す両端固定はりモデルに対して，(17)式の方法に対応する方法で近似的に求めた応力成分の偏微分値と上記の方法で求めたより厳密な値とを比較して，表１に示す。近似的な方法においては $\delta=0.01$(mm) とした。この例の場合，一部の



解析モデル



有限要素モデル

図２　両端固定はりモデル

表１　応力成分の偏微分結果

節点	従来の近似的手法			本報で提案した手法		
No.	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
P	0.006	0.003	0.229	0.000	0.000	0.229
Q	1.203	0.341	0.224	1.200	0.337	0.224
R	2.449	0.656	0.233	2.456	0.654	0.235
S	2.619	0.439	0.043	2.625	0.434	0.044
T	4.430	0.882	0.516	4.428	0.882	0.516

成分を除いて両者は比較的よく対応しており，むしろ(17)式による近似的な手法の有効性を示す結果となった。しかしながら，近似的な手法の場合，解析モデルによっては前記したような不安点があるため，今後はより厳密な方法で拡張目的関数の偏微分値を算定すべきであると考えている。

５．２　最終形状の乱れを低減する方法

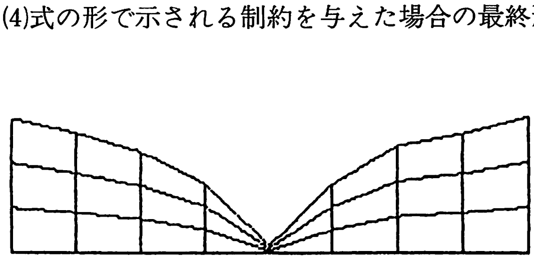
制約条件の与え方が不十分であることによって，あるいは初期形状の与え方によっては最終解がその影響を受ける場合がある。ここではその例と改善方法を簡単に示す。

図３(a)は図２と同じ両端固定ばりモデルの最適解を求めた場合の最終形状を示しており，材料力学解で曲げモーメントが０となるモデルの中央部においてはりの高さが負となる結果となった。これははり高さは正であるという制約を事前に与えておかなかったためでる。本来ははりの高さが負になる可能性がある各点に対して，(16)式の右辺第２項と同じ形のペナルティ項を事前に与えておくべきものであろう。ここではモデル中央の評価点の設計変数 x_m のみに

$$R=10\{\max(0,-x_m)\} \tag{20}$$

という簡易形のペナルティ項を設定し，これを拡張目的関数に追加して同図(b)に示すような改善された最終形状を得た。(20)式において10はペナルティ量に相当している。

また，図５は切り込みのある帯板モデル[1]（の1/2部分，図４）にタイプの異なる２種類の荷重を与え，そのそれぞれによって生じる評価点の応力値に対して(4)式の形で示される制約を与えた場合の最終形状


(b)　修正後

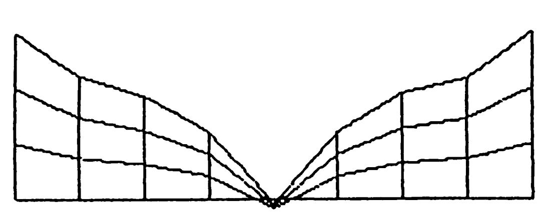

(a)　はり高さが負になる場合

図３　両端固定はりの解析結果

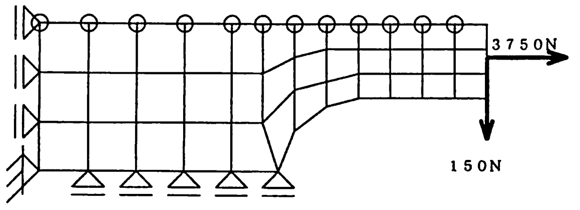
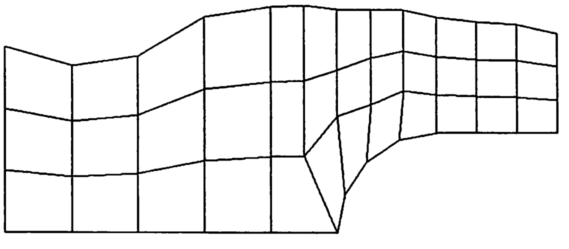
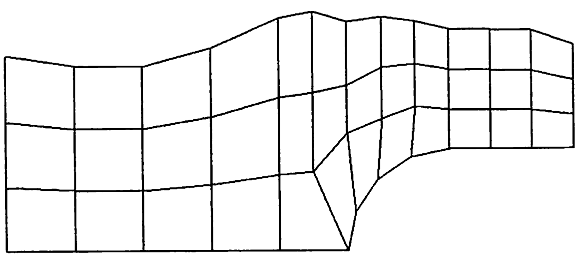


図 4　切り込みのある帯板の有限要素モデル



(b)　改善された最終形状



(a)　形状に乱れがある結果

図 5　切り込みのある帯板モデル解析結果

を示している。軸方向荷重（P_1）を静的荷重，せん断荷重（P_2）を繰り返し荷重と考えて，制約条件式を次式のように設定した。

$$\frac{\sigma(P_1)}{500}+\frac{\sigma(P_2)}{200}\leq 1 \tag{21}$$

図 5 (a)は初期形状を図 4 の形として，2 種類の荷重を同時に与えて上記制約条件式のもとで形状の最適化を図ったものであるが，最終形状に若干の乱れが見られた。それに対して同図(b)はまず荷重 P_1 のみを与えて最適化を行った後，その解析で得られた最終形状を初期形状として，2 種類の荷重を作用させた場合であり，最終形状がかなり改善されていることがわかる。モデル初期形状の体積が512 mm^{3}であるのに対して，(a)が534 mm^3，(b)が528 mm^{3}であっていずれの場合も初期形状よりは体積が増加しているが，これは初期状態では応力制約条件が満たされておらず，体積を増やすことによって制約条件を満たす方向に形状修正が行われたからである。なお，(b)の滑らかな形状の方が若干ではあるが，体積が少なくなっており，その意味でもより良好な解であるといえる。

6．結　　言

最適構造設計において解析モデルの最終形状を決定する上で境界条件の果たす役割が極めて重要であることは秋田高専紀要第34号において既に記述したが，本報では制約条件の与え方や，初期形状の与え方によって解が改善されることを示した。また，最終解に影響を及ぼすであろう探索方向ベクトルをより厳密に求める方法を提案した。

しかしながら，図 5 (b)の最終形状といえどもまだ十分満足できるものとは言えない。収束性をさらに改善し，より良好な解が得られるよう今後とも研究を進めていきたいと考えている。

文　　献

1) 薮忠司・鎌田貴寛・渡辺純孝，秋田工業高等専門学校研究紀要，第34号，98 (1998).
2) 例えば，三好俊郎，有限要素法入門，培風館，1978，144.
3) たとえば，三好俊郎，有限要素法入門，培風館，1978，144.
4) たとえば，同上，135.
5) たとえば，O.C. ツィエンキーヴィッツ著，吉識雅夫・山田嘉昭監訳，マトリックス有限要素法（三訂版），培風館，1984，185.
6) たとえば，同上，191.
7) 今野浩・山下浩，非線形計画法，日科技連，1978，251.
8) たとえば，室津他，システム工学，森北出版，1981，199.
9) たとえば，西川他，岩波講座 情報科学19　最適化，岩波書店，1982，46.
10) 薮忠司・鎌田貴寛・渡辺純孝，秋田工業高等専門学校研究紀要，第34号，98 (1998).