2次元せん断流中の翼の揚力線理論

田　村　純　也*・伊　藤　　　惇

A Lifting-Line Theory for a Wing in a Two-Dimensional Shear Flow

Jun'ya TAMURA and Jun ITO

(1999年11月30日受理)

A lifting-line theory is developed for a 3-dimensional wing placed in both vertical and spanwise two-dimensional shear flow between two parallel planes. By introducing two kinds of separation of variables into both a fundamental solution and a main stream velocity distribution, an equation of motion with respect to disturbance pressure is reduced to two ordinary differential equations. The lifting-line equation is obtained from up-wash velocity distribution along a lifting-line derived from solutions of ordinary differential equations. Hydrodynamic force characteristics are expressed and calculated by series summation whose spectra are solution of the lifting-line equation.

1．緒　　言

軸流形のポンプや水車の羽根車や案内羽根の翼は，その一方の翼端はケーシングに，もう一方の翼端はボスあるいは内筒に接しているため，二つの壁面の間に置かれていることになる。またその壁面間内の流れは，両側壁の境界層の影響のみならず，両側壁間の速度差による非一様流や他の翼の後流など，様々なタイプのせん断流になっていると考えられる。このことを考慮した上で，翼の合理的設計法や性能向上を計るためには,「平行な2平面間に生じたせん断流中の翼の基礎的研究」を行うことが重要であると考えられる。

このような背景より，筆者らは主流の速度分布が翼幅方向と翼面に垂直な上下方向に2次元的に変化する，変数分離が可能な速度分布のせん断流が平行2平面間を流れるとき，その中に置かれた翼に対して揚力線理論を展開し，これに基づいて3次元翼特性を明らかにする研究を行った。既に筆者の一人により超空洞翼に対する同様の研究成果(1)が公表されている。本研究はそれを基に空洞の発生していない翼を対象としたもので，発表済みの論文(2)に掲載できなかった結果および不備な点を加筆，修正すると同時に理論展開を中心に記述したものである。

2．運動方程式

図1に示すように，間隔Hの平行2平面間を流れる，流速 $U(y,z)$ なる2次元せん断流中に，弦長分布 $c(y)$ の3次元翼が両平面に接しかつ迎え角 α で配置されている。流体は非圧縮性，非粘性であるとし，微小じょう乱を仮定すると，図1の座標系におけるじょう乱圧力 p の運動方程式はオイラーの運動方程式と連続の式より次のように表される。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+U^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+U^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{U^2}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0 \tag{1}$$

この方程式の基本解は，翼を揚力線で近似し，ν を任意の実数として

$$p=P(y,z;\nu)\cos \nu x \tag{2}$$

また，主流の速度分布に対する変数分離が次のように表されると仮定する。

$$P(y,z;0)=Y(y)Z(z) \tag{3}$$

$$U(y,z)=V(y)W(z) \tag{4}$$

(3)，(4)を(1)に代入すると，次の常微分方程式が成り立つ。

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{2}{V}\frac{dV}{dy}\frac{dY}{dy}+\mu^2 Y=0 \tag{5}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-\frac{2}{W}\frac{dW}{dz}\frac{dZ}{dz}-\mu^2 Z=0 \tag{6}$$

ここで，μ は分離定数であり，離散的な値をとる(以下，これを μ_n とする)。

* 秋田高専専攻科学生

主流の速度分布は次のように表されるものと仮定する。

$$V(y) = V_0 + \frac{V_1 - V_0}{H} y \tag{7}$$

$$W(z) = e^{kz} \tag{8}$$

境界条件は，次のように与えられる。

$$\frac{dY}{dy} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, H \tag{9}$$

$$Z = 0 \quad \text{at} \quad z \to \infty \tag{10}$$

(9)，(10)の下に(5)，(6)を解き，その解を(3)に代入すると，$z>0$ において次式が得られる。

$$P(y, z; 0) = -\rho V_0 H \Bigg[F(0) V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ (V_0 + Ky)\cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n}\sin(\mu_n y) \right\} \times \exp\left[\left\{ k - (k^2 + \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} \right\} z \right] \Bigg]$$

$$\mu_n = \frac{n\pi}{H}$$

$$K = \frac{V_1 - V_0}{H} \tag{11}$$

ここで，ρ は流体密度，$F(\mu_n)$ は固有値 μ_n に対応するスペクトルである。

z 方向成分の運動方程式は次式のように表される。

$$U\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{12}$$

(2)，(11)，(12)を組み合わせることで，揚力線位置における吹き上げ速度 $w(0, y, 0)$ が得られ，次のように表される。

$$w(0, y, 0) = \frac{V_0 H}{2V} \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \left\{ k - (k^2 + \mu_n^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \times \left\{ (V_0 + Ky)\cos(\mu_n y) - \frac{K}{\mu_n}\sin(\mu_n y) \right\} \tag{13}$$

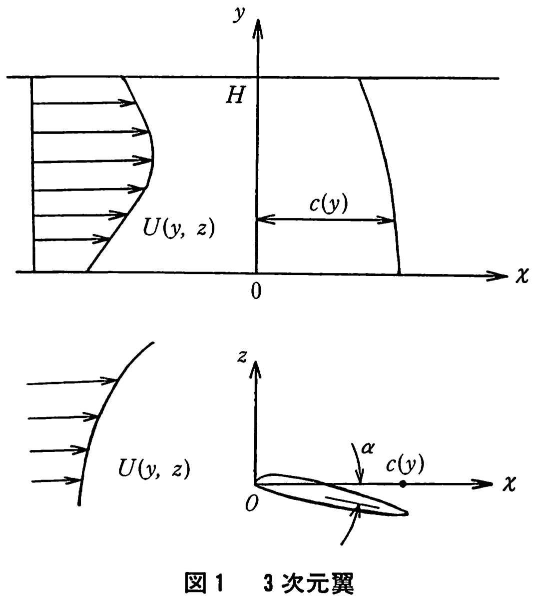

図1　3次元翼

3．揚力線方程式

せん断流中における2次元翼の揚力係数 C_l は，非圧縮性・非粘性流体の流れの仮定の下では，3つの変数の関数として表される。

$$C_l = f(z_f, \alpha, k) \tag{14}$$

ここで，z_f は翼形形状，α は翼形の迎え角，k は主流のせん断流を代表するシアパラメータ［式(8)の垂直方向シアパラメータ］である。(14)で表される揚力係数を，揚力線理論に適用するにあたって以下のことを考慮する。

(a)　迎え角の基準を零揚力角にとる

…z_f の消去

(b)　揚力係数は迎え角に対して線形的に変化する

…テーラー展開の第2項まで用いる

(c)　幾何迎え角を有効迎え角で置きかえる

…誘導迎え角の導入

(d)　誘導迎え角の2次以上の項は無視する

…微小じょう乱の仮定

したがって，(14)は次のように表すことができる。

$$C_l(\alpha_e, k) = C_l(\alpha, k) + \frac{\partial}{\partial \alpha} C_l(\alpha, k)\, \alpha_i$$

$$\alpha_e = \alpha + \alpha_i \tag{15}$$

ここで，α_e は有効迎え角，α は幾何学的迎え角，α_i は誘導迎え角である。

次に，揚力線に働く翼幅方向揚力分布 $l_f(y)$（以下，簡単のため局所揚力と呼ぶことにする）は ε を微小量として，次のように圧力差の積分から得られる。

$$l_f(y) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \{ p(x, y; -0) - p(x, y; +0) \} dx \tag{16}$$

(16)に(2)，(11)を代入することで，(16)は次のように表される。

$$l_f(y) = 2\rho V_0^2 H \Bigg[F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(\mu_n) \times \left\{ \left(1 + \frac{K}{V_0} y \right) \cos(\mu_n y) - \frac{K}{V_0 \mu_n} \sin(\mu_n y) \right\} \Bigg] \tag{17}$$

また，各翼断面 y において2次元の関係が成り立つ仮定から次の式が成り立つ。

$$l_f(y)=\frac{1}{2}\rho c(y)V(y)^2\Big[C_l\{\alpha(y),k;H=\infty\}+\alpha_i(y)\frac{\partial}{\partial\alpha}C_l\{\alpha(y),k;H=\infty\}\Big] \tag{18}$$

(17), (18)より最終的に $F(\mu_n)$ を未知数とする次の揚力線方程式が得られる。

$$F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(\mu_n)\left\{\left(1+\frac{K}{V_0}y\right)\cos(\mu_n y)-\frac{K}{V_0\mu_n}\sin(\mu_n y)\right\}\left[1-\frac{1}{8}c(y)\left\{k-(k^2+\mu_n^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\times\frac{\partial}{\partial\alpha}C_l\{a(y),k;H=\infty\}\right]$$
$$=\frac{1}{4H}c(y)\left(1+\frac{K}{V_0}y\right)C_l\{a(y),k;H=\infty\} \tag{19}$$

揚力線方程式(19)を解くためには，与えられた迎え角，垂直上下方向シアパラメータに対する揚力係数と揚力傾斜の2次元特性値をあらかじめ求めておく必要がある。本研究では，筆者の一人によるせん断流中における2次元理論[3]に基づく計算結果を用いた。

4．流体力特性

局所揚力係数 $C_l(y)$ を次式で定義する。

$$C_l(y)=\frac{2l_f(y)}{\rho c(y)V(y)^2} \tag{20}$$

(17)を用いることで $C_l(y)$ は次のようになる。

$$C_l(y)=\frac{4H}{c(y)}\left\{\frac{V_0}{V(y)}\right\}^2\left[F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(\mu_n)\left\{\left(1+\frac{K}{V_0}y\right)\times\cos(\mu_n y)-\frac{K}{V_0\mu_n}\sin(\mu_n y)\right\}\right] \tag{21}$$

全揚力係数 C_L は次式で定義される。

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho\int_0^H c(y)V(y)^2dy} \tag{22}$$

ここで，全揚力 L は次式で与えられる。

$$L=\int_0^H l_f(y)\,dy \tag{23}$$

(17), (22), (23)より C_L は次のようになる。

$$C_L=\frac{4HL}{\int_0^H c(y)V(y)^2dy}\times\left\{HF(0)-4\frac{K}{V_0}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}F(\mu_n)\right\} \tag{24}$$

誘導抗力係数 C_{Di} は次式で定義される。

$$C_{Di}=\frac{D_i}{\frac{1}{2}\rho\int_0^H c(y)V(y)^2dy} \tag{25}$$

ここで，誘導抗力係数 D_i は次式で与えられる。

$$D_i=-\int_0^H l_f(y)\frac{1}{V(y)}w(0,y,0)\,dy \tag{26}$$

よって，C_{Di} は(13), (17), (25), (26)より次のようになる。

$$C_{Di}=\frac{2V_0^2H^2}{\int_0^H c(y)V(y)^2dy}\int_0^H\left\{\frac{V_0}{V(y)}\right\}^2\times\sum_{n=1}^{\infty}F(\mu_n)\left\{k-(k^2+\mu_n^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\times\left\{\left(1+\frac{K}{V_0}y\right)\cos(\mu_n y)-\frac{K}{\mu_n V_0}\sin(\mu_n y)\right\}$$
$$\times\left[F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}F(\mu_n)\left\{\left(1+\frac{K}{V_0}y\right)\cos(\mu_n y)-\frac{K}{\mu_n V_0}\sin(\mu_n y)\right\}\right]dy \tag{27}$$

5．計算結果

本研究で数値計算した際に採用した翼は，平面形状は矩形，断面形状は平板，迎え角は5°であるとした。数値計算の結果より，翼幅方向揚力係数分布，全揚力係数および誘導抗力係数の流体力特性に及ぼす垂直方向シアパラメータ k，翼幅方向シアパラメータ V_0/V_1，テーパ比 T_p の影響を明らかにした。

図2に垂直方向シアパラメータ k をパラメータに，翼幅方向シアパラメータ $V_0/V_1=0.5$，アスペクト比 $\lambda=3$，テーパ比 $T_p=0$ における翼幅方向揚力係数分布を示す。k が大きくなるほど大きな値となるが，これは k が大きくなると翼上面側の流速が大きくなり圧力が低下することが原因と考えられる。また $y=0$ 側すなわち主流の低速流域側が大きな値になるが，この理由は次のことが考えられる。すなわち，主流の縦渦が翼面をよぎると翼後縁背後で引き伸ばされ，これが随伴渦となりこれによる翼の部分における誘導速度は主流の低速流域側に吹き上げ，高速流域側に吹き下ろしが作用し，それぞれ高速流域側で有効迎え角が幾何迎え角により大きく，低速流域側で有効迎え角が幾何迎え角より小さくなることによると考えられる。

図3に V_0/V_1 をパラメータに，$k=0.5$，$\lambda=3$，$T_p=0$ における翼幅方向揚力係数分布を示す。V_0/V_1 が大きくなるほどフラットな分布になるが，これ

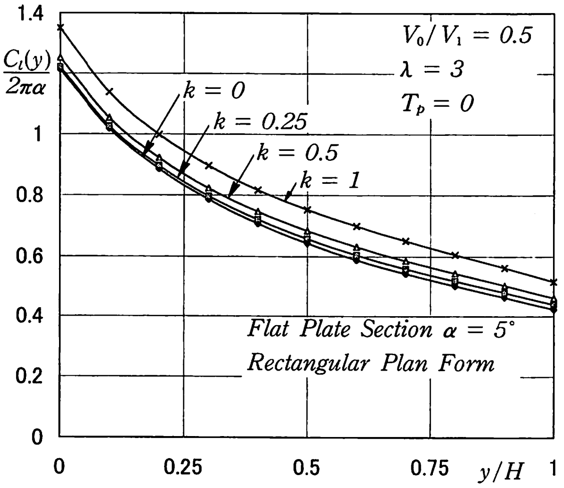

図 2　局所揚力係数分布（k の影響）

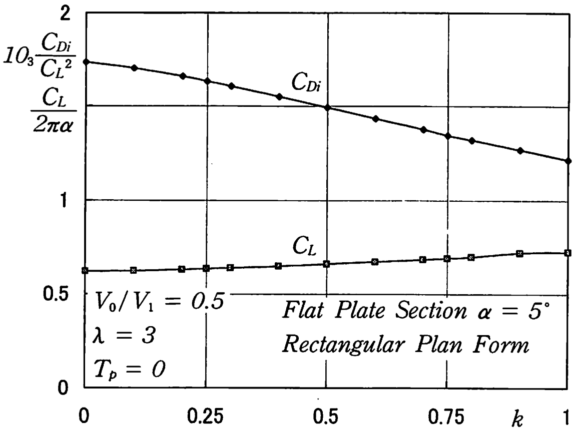

図 5　全揚力係数と誘導抗力係数（k の影響）

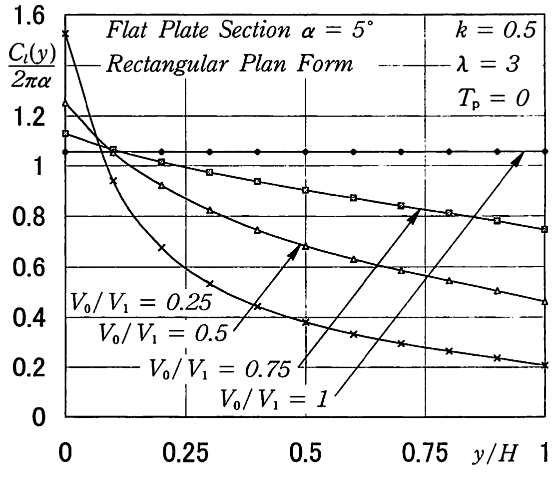

図 3　局所揚力係数分布（V_0/V_1の影響）

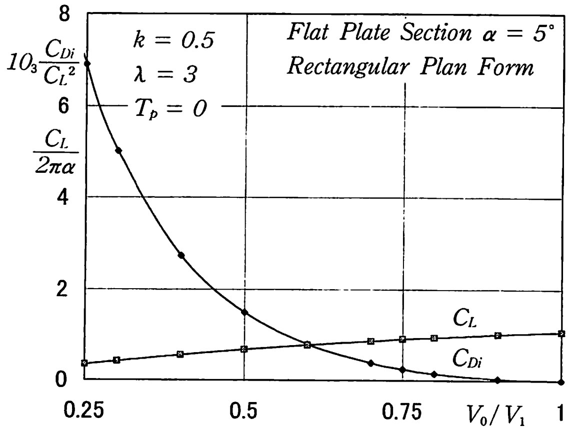

図 6　全揚力係数と誘導抗力係数（V_0/V_1の影響）

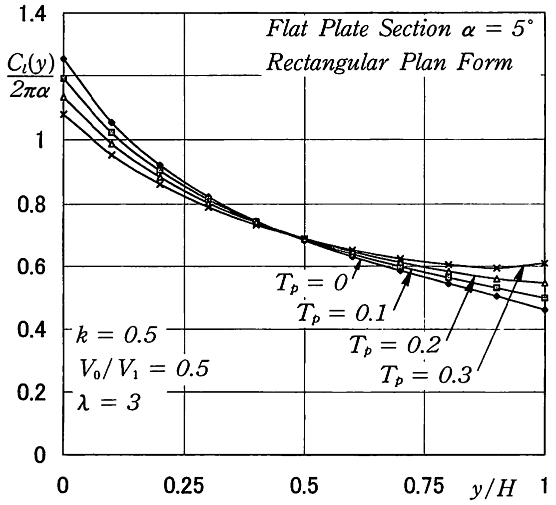

図 4　局所揚力係数分布（T_pの影響）

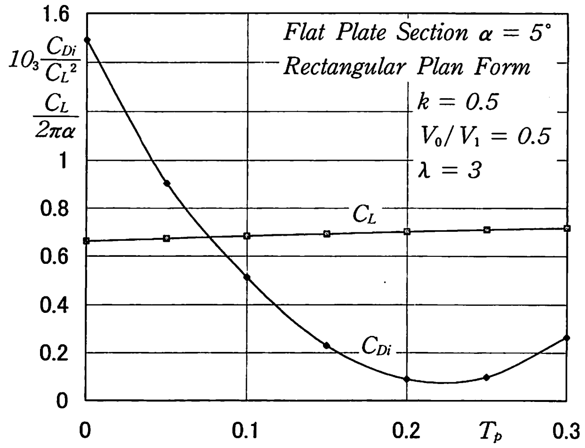

図 7　全揚力係数と誘導抗力係数（T_pの影響）

より主流の速度が一様な流れに近づくことによって2次元的すなわち一様分布になることがわかる。低速流域側が大きな揚力係数分布になるのは図2の説明と同じである。

図4に T_p をパラメータに，$k = 0.5$，$V_0/V_1 = 0.5$，$\lambda = 3$ における翼幅方向揚力係数分布を示す。T_p の影響は小さいが，T_p が大きいほどいくらかフラットになる傾向を示す。これは次の理由によるものと考えられる。すなわち，テーパが大きくなることにより，低速流域側が高速流域側に比べ翼弦が大きくなることにより揚力係数は減少する傾向を示し，高速流域側は逆に増加する傾向を示すことによると考えられる。基本流の低速流域側が揚力係数分布が大きくなるのは図2と同じである。

図5に翼幅方向シアパラメータ $V_0/V_1 = 0.5$，アスペクト比 $\lambda = 3$，テーパ比 $T_p = 0$ における垂直方向シアパラメータ k と全揚力係数 C_L および誘導抗力係数 C_{Di} の関係を示す。k の増加とともに C_L が増加する理由は図2から明らかである。また k の増加とともに C_{Di} が減少するのは，C_L の増加から知られるように誘導迎え角の減少が原因と考えられる。

図6に $k = 0.5$，$\lambda = 3$，$T_p = 0$ における V_0/V_1 と C_L，C_{Di} の関係を示す。V_0/V_1 が大きくなるほど，すなわち主流が2次元的になるほど，誘導迎え角は減少し，有効迎え角は大きくなる。したがって，揚力係数は増加し，誘導抗力は減少し0に近づく。

図7に $k = 0.5$，$V_0/V_1 = 0.5$，$\lambda = 3$ における T_p と C_L，C_{Di} の関係を示す。T_p の増加に対し C_L はわずかながらに増加する傾向を示し，誘導抗力係数は最小値を示す。これらの物理的説明はいずれも難しいが，誘導抗力は最小値を有することは翼平面形の設計に大きなガイドラインを与えるものとして注目される。

6．結　言

平行な2平面間を流れる2次元せん断流（すなわち主流の速度分布が，翼幅方向と翼面に垂直な上下方向の両方向に変化するせん断流）の中の3次元翼に対し，揚力線理論を展開するとともに，これに基づいて3次元翼特性を明らかにした。本研究の内容は以下のように要約される。

(1)　じょう乱圧力に関する運動方程式に対して，3次元翼を揚力線で近似した基本解と主流の速度分布の両者に変数分離を導入することにより，2種の常微分方程式の境界値問題が誘導された。またこれらの一般解が得られ，これと運動方程式の z 成分から吹き上げ速度が導き出された。

(2)　2次元流れの問題における物理量の考察から，揚力線理論へ応用するための揚力係数表示が示され，さらに吹き上げ速度を考慮することにより揚力線方程式が導き出された。これは，翼幅方向の選点によって連立方程式に帰着され，数値的に解かれた。

(3)　局所揚力係数，全揚力係数および誘導抗力係数が，揚力線方程式の解を係数とする級数和として表示され，その具体的計算によってこれら3種の流体力特性に及ぼす2種のシアパラメータによる影響が明らかにされた。

参考文献

(1)　伊藤惇・成田章・中村理一郎，2変数せん断流中における超空洞翼の揚力線理論，日本機械学会論文集，59-567, B (1993), p. 3393-3398.

(2)　田村純也・伊藤惇，揚力線理論による2変数せん断流中の翼特性，日本機械学会東北支部米沢地方講演会講演論文集，(1999-9-29), p 167.

(3)　伊藤惇，指数せん断流中における薄翼の一特異点解法，日本機械学会論文集，57-543, B (1991), p. 3778-3782.