

組み合わせ荷重条件下での最適構造設計

藪 忠 司・鎌 田 貴 寛*・渡 辺 純 孝**

Optimum Structural Design under Multiple Loading Conditions

Tadashi SO, Takahiro KAMADA, and Sumitaka WATANABE

(1998年11月30日受理)

It is important in the optimum structural design to give the loading and displacement boundary conditions as precisely as possible, as the optimum shape is quite sensitive to them. However, the most optimization models proposed so far are not sufficient from this point of view, though the optimization techniques have been turned to practical use, owing to the great progress of electric computers and numerical simulation methods.

In this paper, the authors propose the optimization method for more practical loading conditions, such as a static plus an alternating load, or more than two sets of alternating loads. The solutions of the optimization problems are obtained using the exterior penalty method, or the multiplier method, together with the gradient method. Models subjected to a single load or multiple loads are solved using these methods, and it is found that the final shapes obtained are quite satisfactory.

1. 緒 言

最適構造設計において、荷重条件や変位境界条件は解析モデルの最終形状を左右する重要な因子である¹⁾²⁾。したがって、解析モデルに与えるべき境界条件はできるだけ多くの状況を考慮に入れた現実に対応したものであることが望ましい。

最近におけるコンピュータ、および有限要素法等の数値解析手法の急速な進歩の結果、これらのツールを駆使する最適構造設計手法は実用レベルにほぼ到達したという印象を受ける。しかしながら、これまでに発表された最適化モデルの多くは境界条件のモデル化という点で必ずしも十分であったとはいえない。

本報告では境界条件のうち荷重条件のみに着目し、静的荷重と繰り返し荷重、複数種類の繰り返し荷重のようなより現実的な荷重条件下でのモデル体積最小化問題を設定してその解析例を示す。最適化手法は外点ペナルティ法、あるいは乗数法と勾配法とを組み合わせた数値計画的な手法である。

2. 最適化問題の設定

最適化問題は、一般に次のように表現することができる。

「設計変数 \mathbf{x} についての制約条件

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

のもとで、目的関数 $f(\mathbf{x})$ を最小化せよ。」

本報告においては、応力についての不等式制約条件下で、モデル体積を最小化することを考える。したがって、目的関数 $f(\mathbf{x})$ はモデル体積である。また、設計変数 \mathbf{x} はモデルの形状を規定するパラメータであり、具体的には有限要素モデルの表面の節点座標である。

応力についての不等式制約条件式はモデルに作用する荷重のタイプによって、以下のように分類することができる。

1) 単一種類の荷重が作用する場合

i 番目の応力評価点に生じる応力 (相当応力) を σ_{ei} 、許容応力を σ_a とすると、

$$g_i(\mathbf{x}) = \sigma_{ei} - \sigma_a \leq 0 (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

ここに、 m は応力評価点の数である。

2) 静的荷重と繰り返し荷重が作用する場合

* 秋田高専専攻科, **秋田大学工学資源学部

静的荷重によって、モデルの第 i 評価点に応力 σ_{si} が生じ、両振繰り返し荷重によって同じ点に振幅 σ_{di} の繰り返し応力が作用する場合には、疲労限度線図をこれらの組み合わせ応力に対する許容限界と考えることにより、制約条件式（応力の許容範囲）を次のような形で与えることができる。

$$g_i(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{si}}{\sigma_r} + \frac{\sigma_{di}}{\sigma_w} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

ここに、 σ_r ：真破断力

σ_w ：両振許容疲労限度

3) 複数種類の繰り返し荷重が作用する場合

この場合にはこれらの荷重による累積損傷がある限度以下になるように各評価点での応力値に制約を加える必要がある。

構造物を構成している材料の S-N 曲線が

$$\sigma N^q = C \quad (5)$$

(σ ：応力振幅、 N ：破断までの繰り返し数、 q 、 C ：材料定数)の形で表されるものとし、着目点に振幅 σ_r の両振り繰り返し応力が n_r ($r = 1, 2, \dots, L$) 回ずつ作用するものとすれば、それらの応力によってその点が破損しないための条件は

$$\sum_{r=1}^L \frac{n_r}{N_r} < 1 \quad (6)$$

で与えられる。ただし、ここでは線形累積損傷則³⁾が成り立つものと考えており、 N_r は振幅 σ_r 下での破断までの繰り返し数である。式(5)によって上式を各評価点に作用する応力相互間に課すべき制約条件に変換すると、次式のようになる。

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^L \frac{n_r}{C^{1/q}} \cdot \left(\sigma_{ri} \right)^{1/q} - 1 \leq 0 \quad (7)$$

ここで、 σ_{ri} は r 番目の荷重によって、第 i 評価点に生じる応力の振幅である。

3. 最適化の手法

形状修正の各過程における解析モデルの応力・変形等の挙動は変位法に基づく有限要素法によって求めるものとし、モデル表面の節点座標値のうち適当なものを設計変数 \mathbf{x} に選ぶと、目的関数であるモデル体積と上述の各制約条件式はいずれも \mathbf{x} の高次非線形関数になる。

本論文では、このような制約条件つき非線形最適化問題の解法として外点ペナルティ法⁴⁾、または乗数法⁵⁾を採用する。

外点ペナルティ法はペナルティパラメータ r を用いて制約条件式を目的関数に組み込み、得られた

拡張目的関数

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(\mathbf{x})\}]^2 \quad (8)$$

の制約なし最適化とペナルティパラメータの更新（次第に大きくする）を繰り返し行うことによって、最終的に原問題の最適解を求めるものである。

一方、乗数法は制約条件式ごとに異なるペナルティパラメータ t_i と λ_i ($i = 1, \dots, m$) を導入して目的関数に組み込み、

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2t_i} [\max\{0, \lambda_i + t_i g_i(\mathbf{x})\}^2 - \lambda_i^2] \quad (9)$$

を拡張目的関数と考えてその制約なし最適化とペナルティパラメータの修正を繰り返す手法である。

外点法では r を大きくするにつれ、制約領域の境界にけわしい崖が形成され、これが最適解の探索を困難にするという欠点があるが、乗数法はこれを緩和する手法であり⁶⁾、より優れた最適化手法であると考えられる。

前章で設定した最適化問題を、有限要素法と乗数法の組合せによって解くプログラムの大まかなフローを図1に示す。

一方向探索のステップは探索方向 \mathbf{p} を固定した状態で近似最小解を求めるステップであり、歩み幅 α を種々変化させて、まずその方向における最小点を限定された領域内に囲い込み、つぎにその領域内での近似最小値を放物線近似によって算定する。

探索方向は制約条件なし最適化の過程でどのような手法を用いるかによって異なるが、ここでは一番基本的な最急降下法⁷⁾を用いており、したがって、 \mathbf{p} は拡張目的関数を各設計変数で偏微分して得られる勾配ベクトルと逆方向のベクトルとなる。

一点鎖線で囲まれた部分は制約条件なし最適化のステップを示しており、ペナルティパラメータを固定した状態で設計点と探索方向を変えつつ、最適解を探索する。このステップでは、

$$F_{\min}^{(k+1)} - F_{\min}^{(k)} \geq -10^{-4} F_{\min}^{(k)} \quad (10)$$

という条件が二度続けて満たされたときに最終解に到達したものと判定する。ここに、 $F_{\min}^{(k)}$ は k 回目の繰返しにおける拡張目的関数の最小値を表わしている。この状態で乗数法の要求する収束条件が満たされていれば最適解が得られたものと判断し、そうでない場合にはペナルティパラメータを更新して、さらに最適解の探索を続ける。

収束判定条件の適切な設定は効率よく最適解を得るうえでの重要なポイントであるが、式(10)のよう

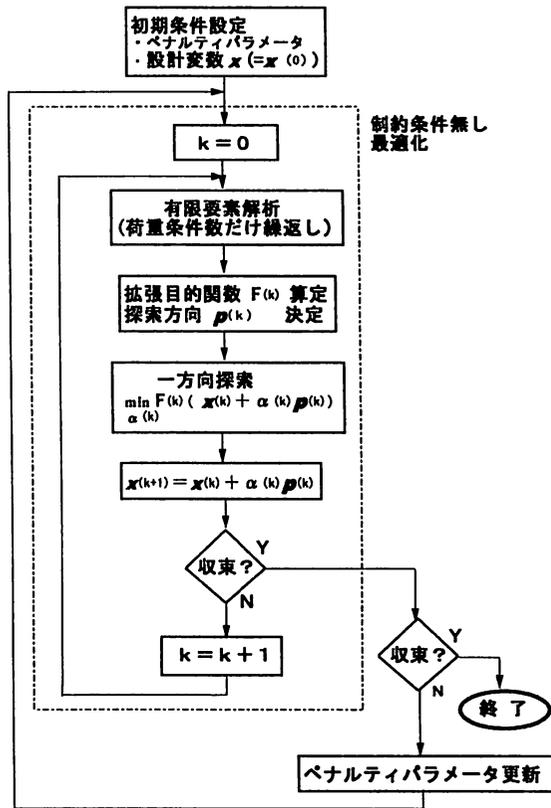


図1 最適化のフロー

な判定条件を設定することによって、本研究ではほぼ満足すべき解を得ている。

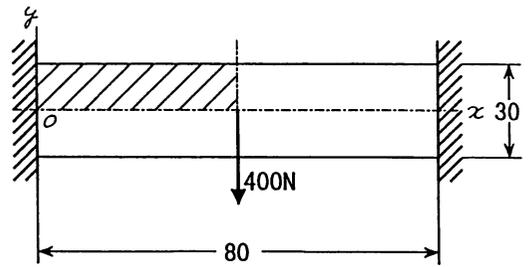
4. 解析例

制約条件式が(3)式、あるいは(4)式の形をとる場合の解析例を1例ずつ示す。

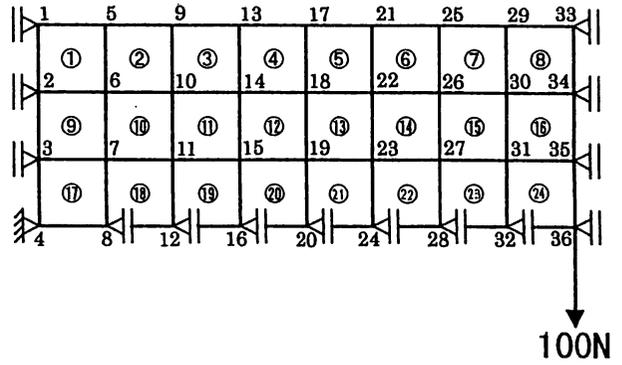
4.1 単一荷重を受ける両端固定ばりモデル

中央に集中荷重400 Nを受ける図2 (a)の両端固定ばりの1/4部分(斜線部)を同図(b)のように有限要素モデル化した。設計変数をはりの外表面に位置する9つの節点のy座標とし、これらの節点における相当応力値を50 MPa以下に抑えるという条件のもとでモデル体積を最小化したところ、最終的に表1および図3のような結果を得た。

節点17位置での曲げ応力の値は本来0であるべきであるが、表1の初期値の欄で若干値が存在しているのは、主として要素分割の粗さに起因するものであると思われる。最終解において各節点位置におけるy座標の値は負担すべき曲げモーメントの大きさに応じて変化しており、理論解である節点20を頂点とする放物線形状にほぼ近い形となっている。また、表面応力は応力値が物理的意味を持たない節点



(a) 解析モデル



(b) 有限要素モデル

図2 両端固定ばりモデル

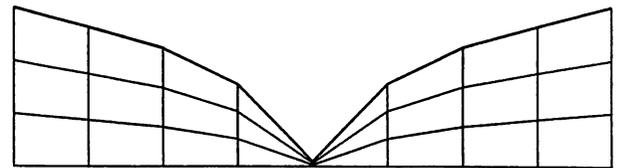


図3 両端固定ばりモデルの最終形状

表1 両端固定ばりにおける初期値と最終値

節点番号	初期値		最終値	
	Y座標 (mm)	相当応力 (MPa)	Y座標 (mm)	相当応力 (MPa)
1	15.0	27.4	10.6	48.3
5		23.6	9.4	49.9
9		16.6	7.9	50.0
13		8.9	5.5	49.9
17		4.7	0.3	8.0
21		8.9	5.6	49.5
25		16.6	8.0	49.1
29		23.6	9.4	49.8
33		27.5	10.7	48.4

表面応力の制約値は50 MPa

17を除いてほぼ制約値50 MPaに一致しており、分割の粗さの割には満足すべき結果が得られていることがわかる。

4. 2 曲げと軸力を受けるフォーク状モデル⁸⁾

まず図4に示すような長円形の切り込みを持った帯板に $P = 150 \text{ N}$ の引張荷重が単独で作用する場合の最適設計問題を考える。解析モデルを図のように4辺形要素で分割し、荷重点を除く側辺上の節点を応力評価点、それらの節点の y 座標を設計変数と考える。応力値の上限を 50 MPa として体積が最小になるような形状を求めたところ、図5に破線で示したような形状が得られた。最終状態におけるモデルの体積は初期値の78%であり、表面応力は均一で、強度的にバランスのとれた形状となっていることがわかった。

次に荷重端に上記引張荷重以外にせん断荷重 $T = 12 \text{ N}$ を付加した場合に、最適形状がどのように変化するかを調べた。

ただし、引張荷重は繰り返し荷重、せん断荷重は静的荷重の形で作用するものと考え、それぞれの荷重によって応力評価点に生じる応力 σ_P , σ_T の間に式(4)に対応する

$$\frac{\sigma_P}{50} + \frac{\sigma_T}{200} - 1 \leq 0 \quad (11)$$

という制約を与えた。モデルの初期形状として、引張荷重が単独に作用した場合の最終形状を選び、最適化を行ったところ、図5に実線で示すような形状が得られた。破線で示した初期形状に対し、曲げ応

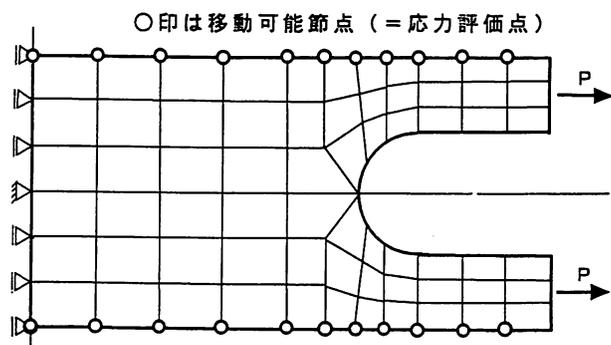


図4 フォーク状モデル

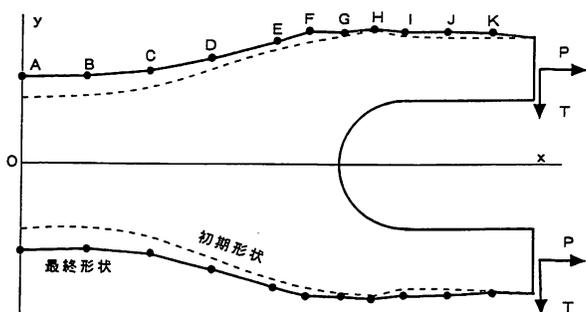


図5 フォーク状モデルの初期および最終形状

力の占める割合の大きい固定端近傍での形状修正量が相対的に大きくなっている。

図6は荷重 P , T によって形状修正前後のモデル表面に生じる応力の分布を示したもので、初期形状は引張荷重 P に対しては一律な応力状態にあるが、せん断荷重 T によって固定端近傍に大きな応力を生じており、それが図5のような形状修正によって大幅に低下していることがわかる。

図7は縦軸に σ_P , 横軸に σ_T をとって、初期および最終時における各評価点の応力状態と制約条件式との位置関係を示したものである。初期には制約条件を大きく破っていた各点の応力が、最終時にはすべて制約条件式上に乗っており、満足すべき最終解が得られていることはこの図からも明らかである。

5. 結 言

最適構造設計において解析モデルの最終形状を決定する上で境界条件（ここでは荷重条件のみを取り扱った）の果たす役割が極めて重要であるとの観点から問題を定式化し、解析例を示した。解析結果は

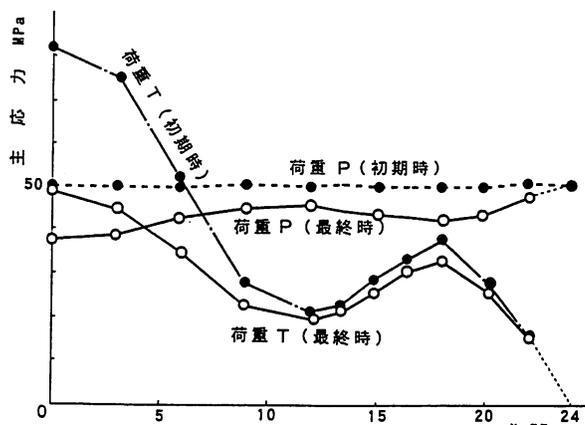


図6 初期および最終時における応力分布

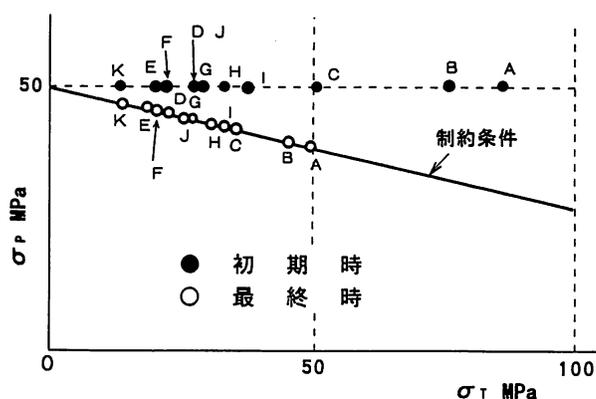


図7 評価点の応力と制約条件の関係

満足すべきものであった。

本報告での取扱いは、より現実的な最適構造設計へのアプローチのひとつであるが、実用性という点を重視して、今後更に研究を進めていきたいと考えている。

文 献

- 1) 瀬口・多田, 機講論, No. 814-12, 31, 1982.
- 2) Venkayya, V. P., Int. J. Numer. Methods Eng., 13, 203, 1978.
- 3) たとえば西谷弘信編, 総合材料強度学講座 6 疲労強度学, オーム社, 1985, 231.
- 4) 室津他, システム工学, 森北出版, 1981, 199.
- 5) 今野・山下, 非線形計画法, 日科技連, 1978, 248.
- 6) 室津他, システム工学, 森北出版, 1981, 200.
- 7) 西川他, 岩波講座情報科学19 最適化, 岩波書店, 1982, 46.
- 8) 藪・瀬口・多田, 機論 A 編, 52, 1191, 1986.