

平行壁間に置かれたキャビテーション翼に及ぼす 側壁境界層による 3次元効果 (理論展開)

伊 藤 惇

3D-Effect of Side Wall Boundary Layer on Cavitating Hydrofoil Between Parallel Plane Walls

—Theoretical Development—

Jun ITO

(1997年11月27日受理)

Cavitation occurs in high speed hydraulic machinery and marine propeller. For improvement of these characteristic analysis and rational design, the theoretical and experimental studies of the two dimensional hydrofoil (hydrofoil section) in cavitation are fundamentally important. Referring to theoretical studies, there exist many results and several ones were presented by the author. On the other hand, the experimental studies ever published are precisely examined, so that that these studies all have weakness becomes clear. This is the fact that the side wall boundary layer effect (3-D effect) of water tunnel where test hydrofoil is installed is not considered. Concerning the upper and lower wall effects which is two dimensional, there exist relatively more theories. However, for the side wall effect a three dimensional theory must be developed and the existing theory of this kind does not exist at all. Therefore, taking no account of the three dimensional effect of side wall of water tunnel on the experimental results has been continued.

From such a back-ground, the theoretical method which estimates the side wall boundary layer effect of water tunnel on experimental results of hydrofoil has been examined by the author so far. And as the first half of this research the case of non-cavitation condition has already been presented^(1,2). This paper aims to extend this case to that of partial and super cavitating conditions.

1. 緒 言

高速水力機械や船用プロペラではキャビテーション (空洞) 現象を伴う。これらの性能改善や合理的設計のためにはキャビテーション発生下の2次元翼 (翼形) の理論的並びに実験的研究が基礎的に重要である。理論的研究に関しては多くの成果が見られ著者も2, 3の論文を発表している。一方過去に公表された実験的研究について詳細に調べてみると、いずれについても欠点があることが判明した。これは試験翼形が設置されている水槽の両側壁の境界層の影響 (3次元効果) が考慮されていない点である。

上下壁に関しては2次元問題であることから比較的多くの理論があるが、両側壁の影響を考慮するためには3次元理論を展開しなければならず、この種の既存研究は全く無く、翼形の実験結果には両側壁の境界層による3次元効果は無視され続けてきたことになる。

このような背景から、著者らは翼形の実験結果に対する水槽の両側壁の境界層の影響を評価する理論的方法について検討してきた。そして第1段階として空洞発生のない場合について既に公表した^(1,2)。本研究はこれらを部分空洞及び超空洞を伴う翼形に拡張することを目的としたものである。

2. 基礎式

2.1 運動方程式

図1に示すように、弦長 c 、迎え角 α なる3次元翼が、幅 λ の平行壁間に壁に垂直にまたがっている。流れは翼前縁から剝離して空洞を形成し、翼背面上(部分空洞)あるいは翼後縁より下流(超空洞)まで長さ l なる空洞状態にあるものとする。主流は、翼幅方向に発達した境界層(速度分布は $U(y)$) になっていて、 xy 平面に平行に x 方向に流れている。流体は非圧縮性・非粘性とし、薄翼の仮定からじょう乱速度を一次の微小量として線形化すると、オイラーの運動方程式と連続の式からじょう乱圧力について次の方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{2}{U} \frac{dU}{dy} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

2.2 境界条件

無限遠では、じょう乱圧力 p は零であることから、

$$p = 0 \quad (2)$$

平行壁面では、壁面に垂直な圧力勾配が零であることから、

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

翼面上、空洞のない部分では接線流れの条件より、

$$\frac{w}{U} = \frac{dz_r}{dx} \quad (4)$$

ここで z_r は翼表面の z 座標で、 w はじょう乱速度の z 成分である。空洞領域では圧力一定条件より、

$$p = \text{const.} \quad (5)$$

2.3 変数分離

以上で設定された境界値問題を解くために、運動方程式(1)に対して次の変数分離解を予想する。

$$\frac{p}{\rho} = Y(y)P(x, z) \quad (6)$$

ここで ρ は流体密度である。式(6)より一般解は次の一次結合で表される。

$$\frac{p}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) P(x, z; k_n) \quad (7)$$

ここで k_n は固有値であり、 $Y(y; k_n)$ 、 $P(x, z; k_n)$ 、 $F(k_n)$ は翼幅方向と翼断面平面の基本解およびこれらの線形結合のスペクトルである。変数分離の結果 Y および P に関してそれぞれ次の微分方程式が成立する。

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{2}{U} \frac{dU}{dy} \frac{dY}{dy} + k_n^2 Y = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - k_n^2 P = 0 \quad (9)$$

3. 平面問題 (翼断面)

3.1 圧力関数 [$P(x, z; k_n)$]

式(9)の解は、無空洞状態では、

$$P(x, z; k_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial z} K_0(r) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_r(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi \quad (10)$$

部分空洞状態では、

$$P(x, z; k_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \Gamma_1(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial z} K_0(r) d\xi$$

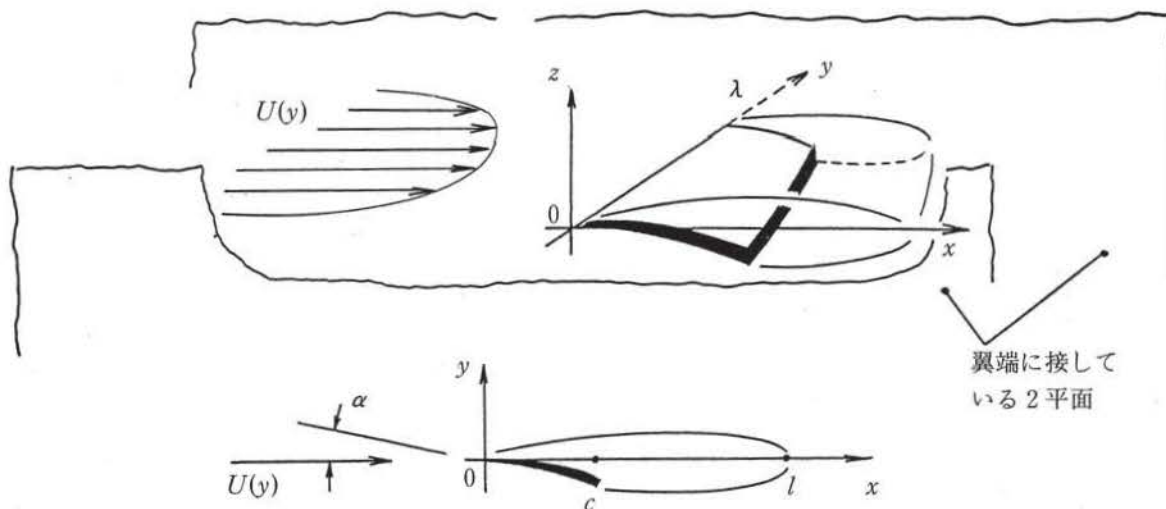


図1 座標

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \int_l^c \Gamma_2(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial z} K_0(r) d\xi \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \Sigma_c(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi
 \end{aligned} \tag{11}$$

超空洞状態では,

$$\begin{aligned}
 P(x, z; k_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial z} K_0(r) d\xi \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_c^l \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi
 \end{aligned} \tag{12}$$

ここで,

$$r = k_n \{z^2 + (x - \xi)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

Γ およびその添字付きは、翼と空洞から成る空間の上下の速度差に関する特異点分布であり、添字付き Σ は同じ空間の厚みに関する特異点分布である (図 2)。言い換えれば、これら 2 種の特異点分布はせん断流でない様な流れ、したがって 2 次元流れと一致するが、このような場合の渦および吹き出し分布に相当する無次元量である。また、 $K_0(r)$ は零次の第 2 種変形ベッセル関数である。

線形理論であることから、式(10)(11)(12)に対して極限操作を行うことにより圧力関数は、

(a) 無空洞の場合は、

$$\begin{aligned}
 P(x, \pm 0; k_n) &= \mp \frac{1}{2} \Gamma(x; k_n) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi \\
 & - \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x - \xi) \\
 & \times R_1(k_n |x - \xi|) d\xi
 \end{aligned} \tag{14}$$

(b) 部分空洞の場合は、 $0 < x < l$ に対して、

$$\begin{aligned}
 P_1(x, \pm 0; k_n) &= \mp \frac{1}{2} \Gamma_1(x; k_n) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^l \Sigma_c(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi - \Delta u_n(x; k_n)
 \end{aligned} \tag{15}$$

また、 $l < x < c$ に対しては、

$$P_2(x, \pm 0; k_n) = \mp \frac{1}{2} \Gamma_2(x; k_n)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^l \Sigma_c(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi - \Delta u_n(x; k_n)
 \end{aligned} \tag{16}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \Delta u_n(x; k_n) &= \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^l \Sigma_c(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x - \xi) \\
 & \times R_1(k_n |x - \xi|) d\xi + \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \\
 & \times \operatorname{sgn}(x - \xi) R_1(k_n |x - \xi|) d\xi,
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$R_1(z) = K_1(z) - \frac{1}{z} \tag{18}$$

上式で $K_1(z)$ は一次第 2 種の変形ベッセル関数である。

(c) 超空洞の場合は、 $0 < x < c$ に対しては、

$$\begin{aligned}
 P_1(x, \pm 0; k_n) &= \mp \frac{1}{2} \Gamma(x; k_n) \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_c^l \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi - \Delta u_n(x; k_n)
 \end{aligned} \tag{19}$$

また、 $c < x < l$ に対して、

$$P_2(x, 0; k_n) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x - \xi} d\xi$$

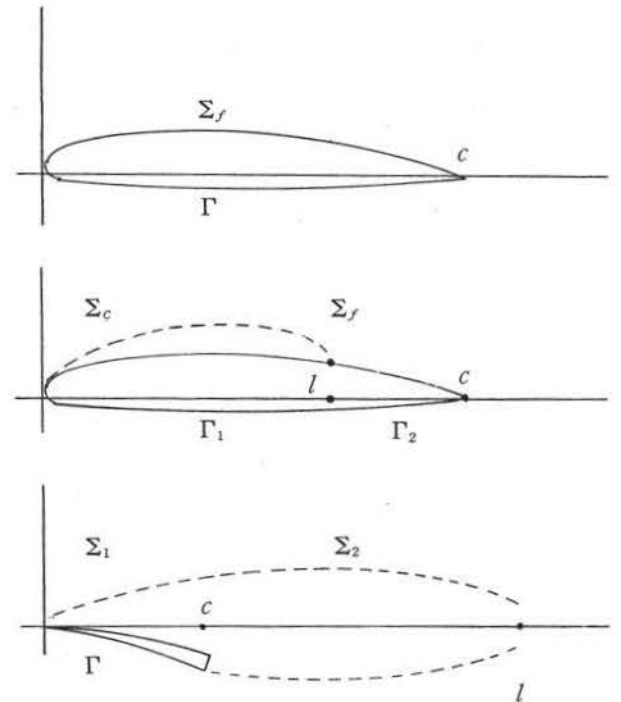


図 2 特異点分布

平行壁間に置かれたキャビテーション翼に及ぼす側壁境界層による3次元効果 (理論展開)

$$-\frac{1}{2\pi} \int_c^l \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi - \Delta u_n(x; k_n) \quad (20)$$

式(19), (20)における $\Delta u_n(x; k_n)$ は,

$$\begin{aligned} \Delta u_n(x; k_n) &= \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x-\xi) \\ &\times R_1(k_n|x-\xi|) d\xi + \frac{1}{2\pi} k_n \int_c^l \Sigma_2(\xi; k_n) \\ &\times \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(k_n|x-\xi|) d\xi \end{aligned} \quad (21)$$

3.2 じょう乱速度 [$w_n(x, z; k_n)$]

運動方程式の z 成分から次式が成り立つ。

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho U \frac{\partial w}{\partial x} \quad (22)$$

第 n 番目の固有値 k_n に対応する無次元じょう乱速度 w_n を次式で定義する。

$$\begin{aligned} w(x, z; k_n) \\ &= \frac{1}{U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) w_n(x, z; k_n) \end{aligned} \quad (23)$$

式(7), (22), (23)から,

$$w_n(x, z; k_n) = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial z} P(x, z; k_n) dx \quad (24)$$

式(24)に式(10), (11), (12)を代入して計算するとそれぞれ以下ようになる。

(a) 無空洞の場合は,

$$\begin{aligned} w_n(x, \pm 0; k_n) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ &- \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x-\xi) \left\{ R_1(k_n|x-\xi|) \right. \\ &+ \left. \int_0^{k_n|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} d\xi - \frac{1}{4} k_n \int_0^c \Gamma(x; k_n) dx \\ &\pm \frac{1}{2} \Sigma_f(x; k_n) \end{aligned} \quad (25)$$

(b) 部分空洞の場合は, $0 < x < l$ に対して,

$$\begin{aligned} w_{n1}(x, \pm 0; k_n) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \Gamma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_l^c \Gamma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \pm \frac{1}{2} \Sigma_c(x; k_n) \\ &\pm \frac{1}{2} \Sigma_f(x; k_n) + \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (26)$$

$l < x < c$ に対しては,

$$\begin{aligned} w_{n2}(x, \pm 0; k_n) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \Gamma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_l^c \Gamma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \pm \frac{1}{2} \Sigma_f(x; k_n) \\ &+ \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Delta w_n(x; k_n) &= -\frac{1}{4} k_n \int_0^l \Gamma_1(x; k_n) dx \\ &- \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^l \Gamma_1(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x-\xi) \\ &\times \left\{ R_1(k_n|x-\xi|) + \int_0^{k_n|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} d\xi \\ &- \frac{1}{4} k_n \int_l^c \Gamma_2(x; k_n) dx - \frac{1}{2\pi} k_n \\ &\times \int_l^c \Gamma_2(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x-\xi) \left\{ R_1(k_n|x-\xi|) \right. \\ &+ \left. \int_0^{k_n|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} d\xi \end{aligned} \quad (28)$$

(c) 超空洞の場合は $0 < x < c$ に対して,

$$\begin{aligned} w_{n1}(x, \pm 0; k_n) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ &\pm \frac{1}{2} \Sigma_1(x; k_n) + \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (29)$$

$c < x < l$ に対しては,

$$\begin{aligned} w_{n2}(x, \pm 0; k_n) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ &\pm \frac{1}{2} \Sigma_2(x; k_n) + \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (30)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Delta w_n(x; k_n) &= -\frac{1}{4} k_n \int_0^c \Gamma(x; k_n) dx \\ &- \frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x-\xi) \\ &\times \left\{ R_1(k_n|x-\xi|) + \int_0^{k_n|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} d\xi \end{aligned} \quad (31)$$

3.3 積分方程式

翼表面上では, 式(4)と(23)より,

$$\frac{dz_f}{dx} = \frac{1}{U(y)^2} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) w_n(x, z; k_n) \quad (32)$$

空洞部分では, 式(5)と(7)より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) Y(y; k_n) P(x, z; k_n) = \text{const.} \quad (33)$$

が成立する。よって,

(a) 無空洞の場合は, 翼上下面の座標を $z_u(x)$, $z_l(x)$, 反り線を $z_c(x)$ として次のようにおく。

$$\frac{dz_u(x)}{dx} = w_n(x, +0; k_n) \quad (34)$$

$$\frac{dz_l(x)}{dx} = w_n(x, -0; k_n) \quad (35)$$

したがって

$$\frac{dz_c(x)}{dx} = \frac{1}{2} \{w_n(x, +0; k_n) + w_n(x, -0; k_n)\} \quad (36)$$

上式に式(25)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dz_c(x)}{dx} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & -\frac{1}{2\pi} k_n \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \operatorname{sgn}(x-\xi) \\ & \times \left\{ R_1(k_n|x-\xi|) + \int_0^{k_n|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} d\xi \\ & -\frac{1}{4} k_n \int_0^c \Gamma(x; k_n) dx \end{aligned} \quad (37)$$

(b) 部分空洞では, $0 < x < l$, $l < x < c$ の範囲で接線流れの条件をそれぞれ次のように置く。

$$\frac{dz_l(x)}{dx} = w_{n1}(x, -0; k_n) \quad (38)$$

$$\frac{dz_c(x)}{dx} = w_{n2}(x, 0; k_n) \quad (39)$$

ここで,

$$\begin{aligned} w_{n2}(x, 0; k_n) = & \frac{1}{2} \{w_{n2}(x, +0; k_n) \\ & + w_{n2}(x, -0; k_n)\} \end{aligned} \quad (40)$$

式(38), (39)に式(26), (27)を代入すると, $0 < x < l$ に対し,

$$\begin{aligned} \frac{dz_l(x)}{dx} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \Gamma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_l^c \Gamma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{2} \Sigma_c(x; k_n) \\ & -\frac{1}{2} \Sigma_f(x; k_n) + \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (41)$$

$l < x < c$ に対しては,

$$\begin{aligned} \frac{dz_c(x)}{dx} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \Gamma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_l^c \Gamma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi + \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (42)$$

$0 < x < l$ における空洞部分の圧力一定条件は, 次のように置く。

$$P_1(x, +0; k_n) = -\frac{1}{2} \sigma_n(k_n) \quad (43)$$

式(43)に式(15)を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_n(k_n) = & \frac{1}{2} \Gamma_1(x; k_n) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \Sigma_c(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_f(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi + \Delta u_n(x; k_n) \quad (44)$$

(c) 超空洞では, $0 < x < c$ の範囲で接線流れの境界条件を部分空洞の場合と同様に次のように置く。

$$\frac{dz_l(x)}{dx} = w_{n1}(x, -0; k_n) \quad (45)$$

式(45)に式(29)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dz_l(x)}{dx} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & -\frac{1}{2} \Sigma_1(x; k_n) + \Delta w_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (46)$$

$0 < x < c$ および $c < x < l$ における空洞部分の圧力一定条件はそれぞれ次のように置く。

$$P_1(x_1+0; k_n) = -\frac{1}{2} \sigma_n(k_n) \quad (47)$$

$$P_2(x, 0; k_n) = -\frac{1}{2} \sigma_n(k_n) \quad (48)$$

式(47), (48)に式(19), (20)を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_n(k_n) = & \frac{1}{2} \Gamma(x; k_n) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_c^l \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & + \Delta u_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_n(k_n) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_c^l \Sigma_2(\xi; k_n) \frac{1}{x-\xi} d\xi \\ & + \Delta u_n(x; k_n) \end{aligned} \quad (50)$$

式(37)は無空洞状態について, 式(41), (42), (44)は部分空洞状態について, また式(46), (49), (50)は超空洞状態における積分方程式であり, 翼断面流れの基礎方程式である。なお Σ_f は翼厚勾配と等しく次式により決定される。

$$\Sigma_f(x) = \frac{d}{dx} y_t(x) \quad (51)$$

4. 固有値問題 (翼幅方向)

4.1 問題の設定

翼幅方向における流れ場の問題は, 式(3), (8)から次のような固有値問題になる。

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{2}{U} \frac{dU}{dy} \frac{dY}{dy} + k_n^2 Y = 0 \quad (0 < y < \lambda) \quad (52)$$

平行壁間に置かれたキャビテーション翼に及ぼす側壁境界層による3次元効果 (理論展開)

$$\frac{dY}{dy} = 0 \quad (y = 0, \lambda) \quad (53)$$

計算量を減らすために流れの対称性を考慮し、翼幅方向の解析のために本問題を次のように設定する。

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{2}{U} \frac{dU}{dy} \frac{dY}{dy} + k_n^2 Y = 0; 0 < y < \frac{\lambda}{2} \quad (54)$$

$$\frac{dY}{dy} = 0; y = 0 \quad (55)$$

$$\frac{dY}{dy} = 0; y = \frac{\lambda}{2} \quad (56)$$

上述の境界値問題すなわち式(55), (56)の下に式(54)を解く問題は、スツルム・リュウヴィル型の固有値問題となっており、無限個の固有値 $k_n (0, k_1 (> 0), k_2 (> 0), \dots)$ が存在し、それに対応する直交関数系 $Y(y; k_n)$ を解に持つ。したがって、

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{Y(y; k_n) Y(y; k_r)}{U(y)^2} dy = 0 (n \neq r) \quad (57)$$

が成立し、

$$\frac{2}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{Y(y; k_n)^2}{U(y)^2} dy = 1 \quad (58)$$

のように正規化すると、次の関係が成り立つ。

$$F(k_n) = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} Y(y; k_n) dy \quad (59)$$

$$F(0) = Y(y; 0) = \left[\frac{2}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1}{U(y)^2} dy \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (60)$$

4.2 差分方程式

本解法では主流の速度分布について制約は無く任意に与えることができる。主流は十分に発達した境界層を対象としていることから、乱流境界層で成立するカルマン・プラントルにより提案された1/7乗べき法則に従う速度分布を仮定する。すなわち、

$$U(y) = U \left(\frac{\lambda}{2} \right) \left(\frac{2y}{\lambda} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (61)$$

式(54)を差分によって離散化するために以下の計算を行う。

図3において、一次の導関数は、その両側の小区間の平均変化率の平均値によって近似し、二次の導関数は、その両側の小区間の平均変化率がそれぞれの中点にあるものとしその間のこれらの平均変化率として近似する。すなわち点 n における一次及び二次の導関数は、

$$\frac{dY}{dy} \approx \frac{\eta_{n-1} + \eta_{n+1}}{2} \quad (62)$$

$$\frac{dU}{dy} \approx \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \quad (63)$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} \approx \frac{2(\eta_{n+1} + \eta_{n-1})}{y_{n+1} - y_{n-1}} \quad (64)$$

ここで、

$$\eta_{n-1} \equiv \frac{Y_n - Y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \quad (65)$$

$$\eta_{n+1} \equiv \frac{Y_{n+1} - Y_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (66)$$

$$u_{n-1} \equiv \frac{u_n - u_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \quad (67)$$

$$u_{n+1} \equiv \frac{u_{n+1} - u_n}{y_{n+1} - y_n} \quad (68)$$

よって式(54)は次のような差分商方程式になる。

$$\frac{2(\eta_{n+1} - \eta_{n-1})}{y_{n+1} - y_{n-1}} - \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2u_n} \times (\eta_{n-1} + \eta_{n+1}) + k_n^2 Y_n = 0 \quad (69)$$

式(61)より、

$$\frac{2}{U} \frac{dU}{dy} = \frac{2}{7y} \quad (70)$$

また、

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dy} \approx \frac{I}{U_n} \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{1}{7y_n} \quad (71)$$

故に式(69)は次のようになる。

$$\frac{2(\eta_{n+1} - \eta_{n-1})}{y_{n+1} - y_{n-1}} - \frac{\eta_{n-1} + \eta_{n+1}}{7y_n} + k_n^2 Y_n = 0 \quad (72)$$

4.3 固有方程式

式(72)より固有関数 Y_n についての次のような連立方程式が得られる。

$$Y_1 \left[\frac{1}{y_2 - y_1} \left\{ \frac{13y_1 - y_2}{7y_1(y_2 + y_1)} \right\} - k_n^2 \right]$$

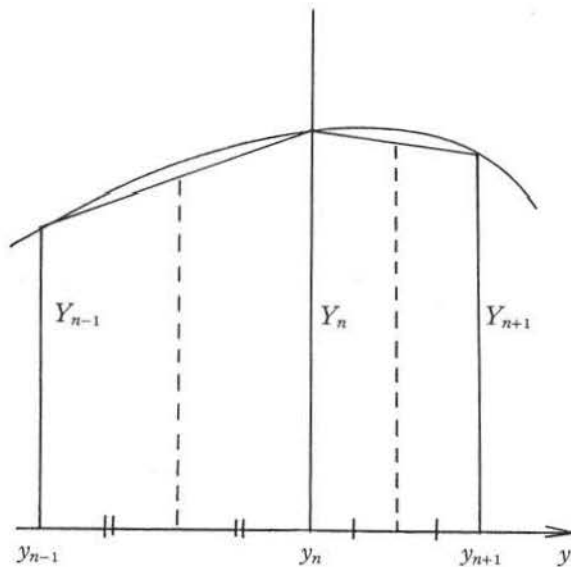


図3 分割

$$-Y_2 \left[\frac{1}{y_2 - y_1} \left\{ \frac{13y_1 - y_2}{7y_1(y_2 + y_1)} \right\} \right] = 0 \quad (n=1) \quad (73)$$

$$\begin{aligned} & Y_{n-1} \left[\frac{1}{y_n - y_{n-1}} \left(\frac{2}{y_{n+1} - y_{n-1}} + \frac{1}{7y_n} \right) \right] \\ & - Y_n \left[\left(\frac{1}{y_{n+1} - y_n} + \frac{1}{y_n - y_{n-1}} \right) \left(\frac{2}{y_{n+1} - y_{n-1}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{7y_n} \left(\frac{1}{y_{n+1} - y_n} - \frac{1}{y_n - y_{n+1}} \right) - k_n^2 \right] \\ & + Y_{n+1} \left[\frac{1}{y_{n+1} - y_n} \left(\frac{2}{y_{n+1} - y_{n-1}} - \frac{1}{7y_n} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (n=2 \sim N-1) \quad (74)$$

$$\begin{aligned} & Y_{N-1} \left[\frac{1}{y_N - y_{N-1}} \left(\frac{2}{\lambda - y_N - y_{N-1}} + \frac{1}{7y_N} \right) \right] \\ & - Y_N \left[\frac{4y_N - 2y_{N-1} - \lambda}{7y_N(\lambda - 2y_N)(y_N - y_{N-1})} \right. \\ & \left. + \frac{2}{(y_N - y_{N-1})(\lambda - y_N - y_{N-1})} + k_n^2 \right] \\ & = 0 \quad (n=N) \end{aligned} \quad (75)$$

これらの係数行列の行列式を零と置くことにより、固有方程式が得られ、QR法⁽³⁾によって固有値 k_n を決定することができる。

4.4 固有関数

固有関数 Y_n は連立方程式(73), (74), (75)を変形した次式を漸化式として使用して求めることができる。

$$Y_2 = \frac{1}{A} \left[\frac{1}{y_2 - y_1} \left\{ \frac{13y_1 - y_2}{7y_1(y_2 + y_1)} \right\} - k_n^2 \right] Y_1 \quad (76)$$

$$\begin{aligned} & Y_{n+1} = \frac{1}{B} \left[\left\{ -\frac{1}{y_n - y_{n-1}} \left(\frac{2}{y_{n+1} - y_{n-1}} + \frac{1}{7y_n} \right) \right\} Y_{n-1} \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\frac{1}{y_{n+1} - y_n} + \frac{1}{y_n - y_{n-1}} \right) \left(\frac{2}{y_{n+1} - y_{n-1}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{7y_n} \left(\frac{1}{y_{n+1} - y_n} - \frac{1}{y_n - y_{n+1}} \right) - k_n^2 \right\} Y_n \right] \end{aligned} \quad (n=2 \sim N-1) \quad (77)$$

$$Y_N = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{y_N - y_{N-1}} \left(\frac{2}{\lambda - y_N - y_{N-1}} + \frac{1}{7y_N} \right) \right] Y_{N-1} \quad (78)$$

ここで、 A, B, C は、

$$A = \frac{1}{y_2 - y_1} \left\{ \frac{13y_1 - y_2}{7y_1(y_2 + y_1)} \right\} \quad (79)$$

$$B = \frac{1}{y_{n+1} - y_n} \left(\frac{2}{y_{n+1} - y_{n-1}} - \frac{1}{7y_n} \right) \quad (80)$$

$$C = \frac{4y_N - 2y_{N-1} - \lambda}{7y_N(\lambda - 2y_N)(y_N - y_{N-1})}$$

$$+ \frac{2}{(\lambda - y_N - y_{N-1})(y_N - y_{N-1})} + k_n^2 \quad (81)$$

固有関数を決定するには、 $Y_1 = 1$ と置いて、式(76)(77)(78)よりすべての Y_n を求める。次に規格化を行うために積分により式(77)の左辺を求め、その値を S と置く。 $Y_n/S^{1/2}$ を新たな Y_n と定義しなおすことによって規格化の条件の式(58)を満足させることができる。

なお、4.2から4.4節のサフィックスの n は、0から $\lambda/2$ の領域を分割する分点の番号を示すものであり、 k_n のサフィックスとは異なることに注意を要する。

5. 平面問題の解法

5.1 無空洞

積分方程式(37)を解くために、未知関数を次のように展開する。

$$\Gamma(x; k_n) = A_0(k_n) \cot \frac{\phi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(k_n) \sin m\phi,$$

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \phi) \quad (82)$$

標点位置は弦長方向であるので、Schlichtingの方法を採用する。すなわち

$$x_\nu = \frac{c}{4N} (4\nu - 1), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (83)$$

ここで N は標点数であり、計算では4とした。

5.2 部分空洞

連立積分方程式(41), (42), (44)を解くために、次のように級数展開する。

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x; k_n) &= A_{-1}(k_n) + A_0(k_n) \sqrt{\frac{1 - \sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)}} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m(k_n) \sin m\phi, \quad x = \frac{l}{2}(1 - \cos \phi) \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(x; k_n) &= B_{-1}(k_n) \frac{1 - \cos \epsilon}{2} + B_0(k_n) \cot \frac{\epsilon}{2} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} B_m(k_n) \sin m\epsilon, \end{aligned}$$

$$x = \frac{c-l}{2}(1 - \cos \epsilon) + l \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_c(x; k_n) &= C_{-1}(k_n) \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} \\ &+ C_0(k_n) \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(k_n) \sin m\theta, \\ x &= \frac{l}{2}(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (86)$$

標点位置の座標 x_i は式(41), (42), (44)に対して次の式によった。

$$x_i = \frac{l}{2} \left[1 - \cos \left\{ \frac{\pi}{2L} (2i-1) \right\} \right], \quad (i = 1, 2, \dots, L) \quad (87)$$

$$x_i = \frac{l}{2} \left[1 - \cos \left\{ \frac{\pi}{2M} (2i-1) \right\} \right], \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (88)$$

$$x_i = \frac{c-l}{2} \left[1 - \cos \left\{ \pi - \frac{\pi}{2N} (2i-1) \right\} \right] + l, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (89)$$

標点数は $L = 6, M = 3, N = 4$ とする。

連立積分方程式(41), (42), (44)の未知関数 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Sigma_c$ に、級数(84), (85), (86)を代入し、さらに式(87), (88), (89)の標点を設定することにより、級数の係数を未知数とする13の数の連立方程式が誘導される。空洞後端における流れモデルとして次式

$$\frac{1}{2} C_{-1}(k_n) + C_0(k_n) + \frac{1}{2} C_1(k_n) = \frac{15}{\pi} \alpha^2 \quad (90)$$

を連立にして加えると、結局14元連立一次代数方程式が得られる。未知数は $A_{-1}, A_0, A_1, A_2, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, C_{-1}, C_0, C_1, C_2, C_3, \sigma_n$ の14個である。

5.3 超空洞

連立積分方程式(46), (49), (50)を解くために、特異点分布を次のような級数に展開する。

$$\Gamma(x; k_n) = A_0(k_n) \sqrt{\frac{1 - \sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)}} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(k_n) \sin m\phi, \quad x = \frac{c}{2} (1 - \cos \phi) \quad (91)$$

$$\Sigma_1(x; k_n) = B_{-1}(k_n) + B_0(k_n) \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(k_n) \sin m\theta, \quad x = \frac{c}{2} (1 + \cos \theta) \quad (92)$$

$$\Sigma_2(x; k_n) = C_{-1}(k_n) + C_0(k_n) \cot \frac{\tau}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(k_n) \sin m\tau, \quad x = \frac{l-c}{2} (1 + \cos \tau) + c \quad (93)$$

また $\Sigma_1(x; k_n)$ と $\Sigma_2(x; k_n)$ の接続条件から

$$\Sigma_1(c; k_n) = \Sigma_2(c; k_n) \quad (94)$$

したがって

$$B_{-1}(k_n) - C_{-1}(k_n) = 0 \quad (95)$$

また空洞後端の流れモデルとしては、半閉鎖型モデルを採用して、

$$cB_{-1}(k_n) + \frac{1}{4} \pi c \{ B_0(k_n) + B_1(k_n) \} + C_{-1}(k_n) (l-c) + \frac{1}{2} \pi (l-c) \times \left\{ C_0(k_n) + \frac{1}{2} C_1(k_n) \right\} = \frac{1}{2} \alpha c \quad (96)$$

標点の位置と数は次のように与えた。

式(46)に対して翼弦長上6点

$$x = \frac{c}{2} (1 - \cos \phi), \quad \phi_i = \frac{\pi}{12} (2i-1), \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (97)$$

式(49)に対して空洞上3点

$$x = \frac{c}{2} (1 + \cos \theta), \quad \theta_i = \pi - \frac{\pi}{6} (2i-1), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (98)$$

式(50)に対して空洞上3点

$$x = \frac{l-c}{2} (1 + \cos \tau) + c, \quad \tau_i = \pi - \frac{\pi}{6} (2i-1), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (99)$$

以上の標点位置を式(46), (49), (50)に代入し、式(95), (96)の条件を加え14元連立一次代数方程式としてこれを解くことにより、式(91), (92), (93)の級数の係数5, 4, 4個と σ_n を求めることができる。

6. 結言

高速水中翼形の水槽実験に対する水槽の両側壁境界層の影響を明らかにするために、平行壁間に置かれたキャビテーション翼に及ぼすせん断流による3次元効果について理論的検討を行った。これにより具体的な特性表示式の誘導と、これらに基づく特性値の算出が行われる。

終りに本研究は文部省の科研費が交付(単名)された研究(07650228)の一部として行われたものである。

参考文献

- (1) 伊藤惇; 平行壁間に置かれた3次元翼の簡便解析法, ターボ機械, 第24巻, 第10号, pp.609-614 (1996).
- (2) Jun Ito et. al. "A Method for Hydrodynamic Characteristics of a Wing in a Shear Flow" International Journal of the Society of Mate-

rials Engineering for Resources, Vol.5 No.1,
pp.80-90 (1997).

(3) 伊藤惇他；FORTRAN 応用編（数値解法と理

工学問題），森北出版，1992. Cによる理工学問題
の解法，日刊工業新聞社，1994.