非線形常微分方程式（攪乱）系の攪乱項の評価について

麻 生 正 道・工 藤　幹・清 野 昭 一

On the Estimate for the Perturbations of the Systems of Nonlinear Ordinary Differential Equations

Masamichi ASO, Miki KUDO and Shoichi SEINO

(1996年11月29日受理)

Generally, it is difficult to have the explicit solutions of nonlinear differential equations exclusive of the particular forms. In the majority of cases treating the practical problems, it is not important to find the solutions in a closed form but to know some properties of the solutions of the systems.

A.M. Liapounoff [1] get the asymptotic properties of solutions from systems directly, by constructing a scalar function (so-called "Liapounoff function") satisfying certain conceivable conditions. Using this direct method, many investigators have been studying stability, boundedness and so on (cf. [8]～[13]).

J.V. Erhart showed many results about stabitity and boundedness in respect to a system of perturbed nonlinear differential equations $y' = f(t, y) + g(t, y)$, where $g(t, y)$ was perturbed turm [2]. And, F.M. Dannan and S. Elaydi introduced the notion of Lipschitz stability, and published many results about them [3], [4].

M. Kudo [5] introduced the notion of uniformly Lipschitz-like stability and get some results about the estimate for the perturbations of nonlinear perturbed systems by comparing to a scalar equation.

In this paper, we describe that Liapounoff function constructed by J.V. Erhart [2] is useful to the estimate for the perturbations of nonlinear perturbed systems.

1．はじめに

特定の形のものを除いて，非線形常微分方程式の解を求めることは，極めて困難である。しかしながら，実際問題としては，具体的な解が求まらなくても，その解の有する性質が何らかのかたちで示されればそれで十分であるという場合が多い。

A.M. Liapounoff [1]は，ある性質を持つ関数（リヤプノフ関数という）を構成することにより，微分方程式そのものから直接に，解の漸近的性質を導き出した。その後，多くの研究者が，この方法で微分方程式の解の安定性や有界性等について論文を発表している（[8]～[13]を参照)。

J.V. Erhart は[2]で正規形一階常微分方程式系 $x' = f(t, x)$ に対して，攪乱項 $g(t, x)$ をもつ系 $x' = f(t, x) + g(t, x)$ の安定性，有界性について多くの結果を発表している。

また F.M. Dannan と S. Elaydi は[3]，[4]で，リプシッツ安定の概念を導入し，これについていろいろな結果を得ている。

M. Kudo は[5]で類似一様リプシッツ安定（ULLS と略）を定義し，非線形常微分方程式（攪乱)系をあるスカラー方程式と比較することにより，攪乱項 $g(t, x)$ の評価を行った。

我々は[6]で部分一様リプシッツ安定という新しい概念を導入した。リヤプノフ関数を用いる方法により，あるスカラー微分方程式の零解がこの性質を持っているときに，その性質がベクトル方程式の零解の一部分にも保存されるということを示した。

この論文において，我々は J.V. Erhart の構成したリヤプノフ関数の中に ULLS の議論に有効である関数を見い出したので，それを用いて攪乱項を評

価することについて述べる。

2．記号・定義等

R^n をn次元ユークリッド空間，$R^+ = [0, \infty)$ とし，また，ある正の実数 t_0 に対して，区間 $[t_0, \infty)$ を I で表すものとする。$I \times R^n$ で定義され，R^n に値をとる連続関数 $f(t, x)$，（以下これを $f(t, x) \in C(I \times R^n, R^n)$ で表す），に対して，常微分方程式系

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

を考える。ここで，(1)は零解 $x = 0$ を持つ，即ち，$f(t, 0) \equiv 0$ が成り立つものとする。(t_0, x_0) を通る(1)の解を $x(t, t_0, x_0)$ で表す。

次に，撹乱項が $g(t, x) \in C(I \times R^n, R^n)$ であるような(1)の撹乱系を

$$y' = f(t, y) + g(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

とする。ここで，(2)は零解 $y = 0$ を持つ，即ち，$g(t, 0) \equiv 0$ が成り立つものとする。

R^n のユークリッドノルムを $\|\cdot\|$ で表す。

［定義1］ 微分方程式系(1)の零解 $x = 0$ が安定であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t_0 \in R^+, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0 :$$
$$\forall x_0 \in B_\delta, \ \forall t \geq t_0, \ \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$$

なることをいう。

ここに，$B_\delta = \{x \in R^n : \|x\| < \delta\}$ である。

［定義2］ 微分方程式系(1)の零解 $x = 0$ が吸収的であるとは

$$\forall t_0 \in R^+, \ \exists \delta = \delta(t_0) > 0, \ \forall \varepsilon > 0,$$
$$\forall x_0 \in B_\delta, \ \forall x(\cdot, t_0, x_0),$$
$$\exists T = T(t_0, \varepsilon, x_0, x(\cdot, t_0, x_0)) :$$
$$\forall t \geq t_0 + T, \ \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$$

なることをいう。

［定義3］ 微分方程式系(1)の零解 $x = 0$ が漸近安定であるとは［定義1］と［定義2］がともに成り立つことをいう。

［定義4］ 微分方程式系(1)の零解 $x = 0$ が一様リプシッツ安定であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t_0 \in R^+, \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$
$$\exists M > 0 : \forall x_0 \in B_\delta, \ \forall t \geq t_0,$$
$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq M\|x_0\|$$

なることをいう。

［定義5］ 微分方程式系(1)の零解 $x = 0$ が類似一様リプシッツ安定であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall t_0 \in R^+,$$
$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$$
$$\exists \phi(r) > 0 : \forall x_0 \in B_\delta, \ \forall t \geq t_0,$$
$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \phi(\|x_0\|)$$

なることをいう。ここに，$\phi(r) \in C(R^+, R^+)$ は単調増加関数である。

［例］ スカラー微分方程式 $du/dt = u/(t^2+1)$，$u(t_0) = u_0$ の解は $u(t, t_0, u_0) < u_0 \exp(\pi/2)$ を満たすので一様リプシッツ安定である。

また，スカラー微分方程式 $du/dt = \sqrt[3]{u^2}/(t^2+1)$，$u(t_0) = u_0$ の解は $u(t, t_0, u_0) < (\sqrt[3]{u_0} + \pi/6)^3$ を満たすので類似一様リプシッツ安定である。

［定義6］ 関数 $V(t, x) \in C(R^+ \times R^n, R^+)$ に対して，$V'(t, x)$ と $V'_{(1)}(t, x)$ とを，夫々

$$V'(t, x) = \limsup\{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))\}/h,$$
$$V'_{(1)}(t, x) = \limsup\{V(t+h, x+hf(t+h)) - V(t, x(t))\}/h$$

で定義する。

ここに，limsup は $h \to +0$ のときの上極限である。

$V(t, x)$ が x に関して局所リプシッツ条件を満たす場合には，$V'(t, x) = V'_{(1)}(t, x)$ であること，また，$V(t, x)$ が連続な第1次偏導関数をもつ場合には，$\partial_t = \partial/\partial t$，$\partial_x = \partial/\partial x$，“$\cdot$”を内積の記号として，

$$V'_{(1)}(t, x) = \partial_t V + \partial_x V \cdot f(t, x)$$

の成り立つことが知られている［6］。

3．既に得られている結果

【定理1 (J.V. Erhart［1］)】

区間［0, ∞）での積分が∞に発散する関数 $v(t) \in C(R^+, R^+)$ と正の数 η とが存在し，任意の $(t, x) \in R^+ \times \{x : \|x - x_0\| < \eta\}$ に対して $\|f(t, x)\| \geq v(t)$ が成り立っており，以下の条件を満たすリヤプノフ関数が存在するものと仮定する。

（i） 任意の $t \in R^+$ に対して $V(t, 0) = 0$，

（ii） ある $L > 0$ があって，任意の $t \in R^+$ と任意の $x_1, x_2 \in S(B)$ に対して，

$$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

（iii） $(t, x) \in R^+ \times S(B) - \{O\}$ に対して

$$V'_{(1)}(t, x) \leq -\|f(t, x)\|$$

さらに，区間［0, ∞）における積分が有限であるような R^+ での正値関数 $\lambda(t)$ が存在するならば，(2)の零解は漸近安定である。

【定理2 (F.M. Dannan & S. Elaydi［3］)】

(1)の零解が一様リプシッツ安定であるものとし，そのリプシッツ定数を M とする。

各$t \in R^+$を固定したときに，変数uに関して単調非減少であるような関数$r(t, u) \in C(I \times R^+, R^+)$が存在して，

$$\|g(t, y)\| \leqq r(t, \|y\|)$$

が成り立つものとする。このとき，スカラー方程式

$$u' = Mr(t, u),\ u(t_0) = u_0 \geqq 0$$

の零解が一様リプシッツ安定ならば，(2)の零解もまた一様リプシッツ安定となる。

【定理3 (M. Kudo [5])】

（i）$V(t, x)$はxについて局所リプシッツ条件を満たし，$V(t, 0) = 0$，

（ii）$a(t, \|x\|) \leqq V(t, x)$

（iii）$V'_{(1)}(t, x) \leqq r(t, V(t, x))$

を満たす関数$a(t, s) \in C(R^+ \times R^+, R^+)$，$V(t, x) \in C(I \times R^n, R^+)$及び$r(t, u) \in C(I \times R^+, R^+)$が存在するものとする。ここに関数$a(t, s)$は一方の変数を固定すると，他方の変数について単調に増加するものである。

このとき，スカラー微分方程式$u' = r(t, u)$，$u(t_0) = u_0$の零解が性質ULLSをもてば，(1)の零解も性質ULLSを持つ。

【定理4 (M. Kudo [5])】

（i）$V(t, x)$はxについて局所リプシッツ条件を満たし（リプシッツ定数をL），$V(t, 0) = 0$，

（ii）$a(t, \|x\|) \leqq V(t, x)$

（iii）$V'_{(1)}(t, x) \leqq 0$

を満たす関数$a(t, s) \in C(R^+ \times R^+, R^+)$，$V(t, x) \in C(I \times R^n, R^+)$及び$r(t, u) \in C(I \times R^+, R^+)$が存在するものとする。ここに関数$a(t, s)$は一方の変数を固定すると，他方の変数について単調に増加するものである。

このとき，スカラー微分方程式$u' = Lr(t, u)$，$u(t_0) = u_0$の零解が性質ULLSをもてば，

$$\|g(t, y)\| \leqq r(t, V(t, y))$$

を満たすような攪乱$g(t, y)$に対して攪乱系(2)の零解も性質ULLSを持つ。

上の後3つの定理の証明には次の比較定理が用いられている。

【定理5 (V. Lakshmikantham & Leela [7])】

R^2の連結開集合Ω上で連続な関数$r(t, u)$に対して，スカラー微分方程式$u' = r(t, u)$の$u(t_0) = u_0$を満たす最大解が区間$J = [\alpha, \beta]$で存在するものとする。$m(t_0) \leqq u_0$の成り立つ連続関数$m(t)$が$m'(t) \leqq r(t, m(t))$を満たすとき，区間Jでは，$m(t) \leqq u(t)$が成り立つ。

以上の各定理の証明は各文献を参照のこと。

4．今回得られた結果

【定理6】

次の条件を満たす関数$V(t, x) \in C(I \times R^n, R^+)$が存在するものと仮定する。

（i）$V(t, x) > 0\ (x \neq 0)$，$V(t, 0) = 0$，

（ii）$V(t, x)$はxについて局所リプシッツ条件を満たし，リプシッツ定数がL，

（iii）$V'_{(1)}(t, x) \leqq -\|f(t, x)\|$.

このとき，Iで定義されたある関数$\lambda(t)$に対してスカラー微分方程式

$$u' = (1+L)\lambda(t)u,\ u(t_0) = u_0 \tag{3}$$

の零解が性質ULLSを持てば，

$$\|g(t, y)\| \leqq \lambda(t)\|y\|$$

を満たす攪乱$g(t, y)$に対して，(2)の零解も性質ULLSを持つ。

《証明》 $y(t) = y(t, t_0, y_0)$を$y(t_0) = y_0$となるような(2)の解とする。

以下においては limsup は$h \to +0$の上極限とする。

$$\begin{aligned}
&V'_{(2)}(t, y(t)) \\
&= \limsup (1/h)\{V(t+h, y(t)+h[f(t, y(t)) \\
&\quad +g(t, y(t))]) - V(t, y(t))\} \\
&= \limsup (1/h)\{V(t+h, y(t)+h[f(t, y(t)) \\
&\quad +g(t, y(t))]) - V(t+h, y(t) \\
&\quad +hf(t, y(t)) \\
&\quad +V(t+h, y(t)+hf(t, y(t)) \\
&\quad -V(t, y(t))\}
\end{aligned}$$

条件（ii）より

$$\begin{aligned}
&\limsup (1/h)\{V(t+h, y(t)+h[f(t, y(t)) \\
&\quad +g(t, y(t))]) - V(t+h, y(t)+hf(t, y(t))\} \\
&\leqq L\|g(t, y(t))\|.
\end{aligned}$$

故に，

$$\begin{aligned}
V'_{(2)}(t, y(t)) &\leqq L\|g(t, y(t))\| \\
&\quad +V'_{(1)}(t, y(t))
\end{aligned}$$

したがって（iii）より，

$$\begin{aligned}
V'_{(2)}(t, y(t)) &\leqq L\|g(t, y(t))\| - \|f(t, y)\| \\
&\leqq L\|g(t, y(t))\| - \|y'(t)\| \\
&\quad + \|g(t, y(t))\|
\end{aligned} \tag{4}$$

いま，$W(t, y) = V(t, y) + \|y\|$とおくと，

条件（ii）より$V(t_0, y_0) \leqq L\|y_0\|$が成り立つので

$$\begin{aligned}
W(t_0, y_0) &\leqq V(t_0, y_0) + \|y_0\| \\
&\leqq (L+1)\|y_0\|
\end{aligned}$$

$$\text{i.e.}\quad W(t_0, y_0) \leqq (L+1)\|y_0\| \tag{5}$$

が得られる。

さて，(3)の零解が性質ULLSを持つので，

$\exists\delta > 0$，$u_0 < \delta \Rightarrow u(t, t_0, u_0) \leqq \phi(u_0)$
を満たすような単調増加関数 $\phi(r)$ が存在する。
ここに，$u(t, t_0, u_0)$ は $u(t_0) = u_0$ となる(3)の解である。

$W(t_0, y_0) = u_0$ とおき，$\delta/(L+1) = \xi$ とすると，$\|y_0\| \leqq \xi$ であるような任意の y_0 に対して，(5)より

$$u_0 = W(t_0, y_0) \leqq (L+1)\|y_0\| < (L+1)\xi = \delta$$

i.e. $u_0 < \delta$.

したがって，$u(t, t_0, u_0) \leqq \phi(u_0)$ (6)
となる。

次に(4)を用いると，

$$\begin{aligned} W'_{(2)}(t, y(t)) &= V'_{(2)}(t, y(t)) + \|y(t)\|' \\ &< L\|g(t, y(t))\| - \|y'(t)\| \\ &\quad + \|g(t, y(t))\| \\ &\quad + \|y(t)\|' \\ &\leqq (L+1)\|g(t, y(t))\| \end{aligned}$$

すなわち，

$$W'_{(2)}(t, y(t)) \leqq (L+1)\|g(t, y(t))\|$$

が得られるので，$\|g(t, y)\| \leqq \lambda(t)\|y\|$ のとき，

$$\begin{aligned} W'_{(2)}(t, y(t)) &\leqq (L+1)\lambda(t)\|y(t)\| \\ &= (L+1)\lambda(t)\{W(t, y(t)) \\ &\quad - V(t, y(t))\} \\ &\leqq (L+1)\lambda(t)W(t, y(t)) \end{aligned}$$

すなわち，

$$W'_{(2)}(t, y(t)) \leqq (L+1)\lambda(t)W(t, y(t))$$

が成り立つ。この関係式と(3)から，$W(t_0, y_0) = u_0$ を考慮して，比較定理を用いると，

$$W(t, y(t)) \leqq u(t, t_0, u_0) \tag{7}$$

が得られる。$V(t, y(t)) > 0$ より

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= W(t, y(t)) - V(t, y(t)) \\ &< W(t, y(t)) \end{aligned}$$

であるので，(6), (7)と ϕ の単調増加性から，

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &< W(t, y(t)) < u(t, t_0, u_0) \\ &\leqq \phi(u_0) = \phi(W(t_0, y_0)) \\ &\leqq \phi((L+1)\|y_0\|) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \|y(t)\| < \phi((L+1)\|y_0\|)$$

$\phi((L+1)\|y_0\|) = \Phi(\|y_0\|)$ とおくと，$\Phi(r)$ は単調に増加する連続関数である。

したがって，$\xi > 0$ が存在し，$\|y_0\| < \xi$ であるような任意の y_0 に対して，(2)の解 $y(t, t_0, y_0)$ が

$$\|y(t, t_0, y_0)\| < \Phi(\|y_0\|)$$

となり，結局，(2)の零解が性質 ULLS を持つことが言えた。(Q.E.D)

例えば，$t > 0$ において微分方程式

$$x' = -x/(t+1), \quad x(t_0) = x_0 \tag{8}$$

すなわち $f(t, x) = -x/(t+1)$ の場合について考えると，リアプノフ関数[2]として

$$V(t, x) = \|x\|$$

を採用すると，この関数はリプシッツ定数1で局所リプシッツ条件を満たし，さらに，$D_t = d/dt$, $D_x = d/dx$ として

$$\begin{aligned} V'_{(8)}(t, x) &= D_t\|x\| = D_x\|x\| \cdot D_t x \\ &= -\|x\|/(t+1) = -\|f(t, x)\| \end{aligned}$$

すなわち，$V'_{(8)}(t, x) \leqq -\|f(t, x)\|$
が成り立つので，定理6の V にかんする条件(i), (ii), (iii)のすべてを満たしている。そこで，スカラー方程式として

$$u' = (1+L)u/(1+t^2) \tag{9}$$

すなわち，$\lambda(t) = 1/(1+t^2)$ のときを考えると，$u(t_0) = u_0$ を満たす(9)の解は

$$\begin{aligned} &u(t, t_0, u_0) \\ &= u_0 \cdot \exp\{(L+1)(\mathrm{Tan}^{-1}t - \mathrm{Tan}^{-1}t_0)\} \end{aligned}$$

であるから，

$$u(t, t_0, u_0) < u_0 \cdot \exp\{(L+1)\pi/2\}$$

が示される。この右辺 $u_0 \cdot \exp\{(L+1)\pi/2\}$ を $\phi(u_0)$ で表すならば，ϕ は連続な単調増加関数であり，

$$u(t, t_0, u_0) < \phi(u_0)$$

であるから，(9)の零解は性質 ULLS を持つ。

したがって，定理6から，微分方程式(7)に攪乱 $g(t, y)$ あったとしても，それが

$$\|g(t, y)\| \leqq \|y\|/(1+t^2)$$

の範囲内にある場合には，微分方程式

$$y' = -y/(t+1) + g(t, y)$$

の零解は性質 ULLS を持つことになる。

参考文献

[1] A.M. Liapounoff : Problème général de la stabilité du mouvement, Annals of Math. Studies 17, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1949.

[2] J.V. Erhart : Lyapunov theory and perturbations of differential equations, SIAM. J. Math. Anal. vol. 4. No. 3, 1973, 417-432.

[3] F.M. Dannan and S. Elaydi : Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations, J. Math. Anal. Appl. 113 (1986), 562-577.

[4] F.M. Dannan and S. Elaydi : Lipschitz stability of nonlinear systems of

differential equations II. Liapunov functions, J. Math. Anal. Appl. 143 (1989), 517-529.

[5] M. Kudo : On the estimate for the perturbations of nonlinear perturbed systems with some stability property, Research Reports of Akita National College of Technology, 27 (1992), 55-60.

[6] M. Aso, S. Seino and M. Kudo : On the partially uniform Lipschitz stability of systems of ordinary differential equations, Research Reports of Akita National College of Technology, 30 (1994), 178-181.

[7] V. Lakshmikantham and S. Leela : Differential and integral inequalities, Academic Press, 1969.

[8] T. Yoshizawa : Stability theory by Liapunov's second method, Math. Soc. Japan, 1966.

[9] T. Yoshizawa : Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions, Springer-Verlag, 1975.

[10] W.A. Coppel : Stability and asymptotic behavior of differential equations, Heath, Boston, 1965.

[11] A. Halanay : Differental equations : stability, oscillations, time lag, Academic Press, 1969.

[12] J.K. Hale : Ordinary differential equations, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[13] 山本　稔：常微分方程式の安定性，実教出版株式会社，1979.