

# パッシブ要素の調整を伴う アクティブサスペンション系の最適制御設計

木 澤 悟・大日方 五 郎\*

## Optimal Control of Active Suspension Systems with Tuning Passive Elements

Satoru KIZAWA and Goro OBINATA

(1995年11月30日受理)

This paper studies optimal control problems for active suspension systems. LQ control theory has been applied to active control systems, however in most papers tuning the passive parameters has not discussed with the optimality of the control systems. An iterative algorithm is proposed in this paper for the optimality of the entire design procedure which includes the design of passive elements and controllers. The method is based on the steepest descent techniques using sensitivities of the performance index with respect to the passive element. Proposed method is applied to active suspension of 1/4 vehicle model. It is shown that the modified control system improves the characteristics in frequency domain and satisfies the robust LQ optimality.

**Key Words :** Vibration Control, Active Control, Optimal Design, Sensitivity Analysis

### 1. はじめに

制御系を有する機械構造系において、制御系と構造系双方の調整可能なパラメータに関して最適な設計を行う問題を同時最適設計問題<sup>(1)~(4)</sup>という。制御系が付加的存在でなく、機械構造系の中核的機能を果たしている今、制御系と機械構造系を一体として設計仕様を満足させることは重要である。現在のところ、この問題に関する確立された方法は見あたらない。

本報告では制振制御を目的に車両の1/4モデルのアクティブサスペンションシステムを例にとり、制御系の時間領域における評価値を最小化する制御則とサスペンションパッシブ要素のパラメータの最適調整を同時に行う問題を取り上げる。また、評価関数の最小化だけでは周波数特性との結びつきが不明確なため、周波数特性との関係が明確な拘束条件を導入し、閉ループ周波数特性の改善を考慮した。制御則の決定には2次形式評価関数を最小とする最適

レギュレータを用いるが、アクチュエータの容量が指定されるとして操作量の2乗積分値(アクチュエータの平均パワー)が指定された値以下になるという条件のもとでレギュレータを設計する。この操作量の制限のない問題では、パッシブ要素は物理的に実現可能な境界上の値(例えばバネ定数の値がゼロなど)に収束し意味ある解が存在しなくなることがあるので操作量の制限は問題を成立させる重要な条件である。構造系のパラメータの最適調整には最大傾斜法を用い制御系との同時最適化のため繰り返しアルゴリズムを採用する。

### 2. 問題設定

この節では同時最適化問題の問題設定を述べる。はじめに、制御対象としてFig. 1に示す車両の縦方向振動特性を表すモデルを考える。 $m_1$ はバネ上質量、 $m_2$ はバネ下質量、 $k_1$ ,  $d$ はそれぞれパッシブ系のパラメータであるバネ定数とダンパの粘性係数、

\* 秋田大学鉱山学部機械工学科

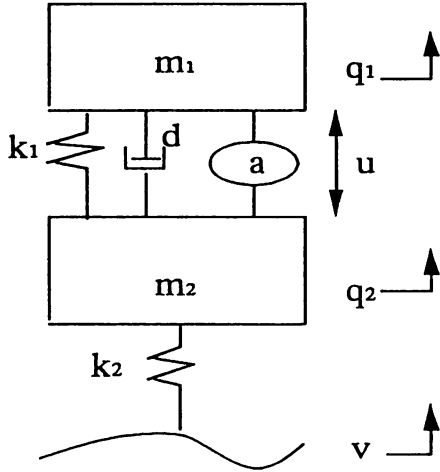


Fig. 1 2DOF System

$k_2$  はタイヤを線形バネと仮定したときのバネ定数である。また、2つの質量の間にアクチュエータが装着されており、制御力  $\bar{u}$  を発生できる。 $\bar{q}_1, \bar{q}_2$  はそれぞれの質量系の変位を表し、 $\bar{v}$  は地面からの変位外乱である。このモデルの状態方程式は、

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} + \bar{G}\bar{v} \quad (1)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{d}{m_1} & \frac{d}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\left(\frac{k_1+k_2}{m_2}\right) & \frac{d}{m_2} & -\frac{d}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ -\frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

となり、ここで状態変数は次式で与えられる。

$$\bar{x} = [\bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \dot{\bar{q}}_1 \quad \dot{\bar{q}}_2]^T$$

ところで、物理的な定数であるパッシブ要素  $k_1, d$  などの調整を行う場合には、数値計算においてこれらの数値のオーダーが問題となることがある。パッシブ要素の数値は状態変数の単位に依存するので絶対的なものではない。また、パッシブ要素は応答特性との関係が必ずしも明確ではない。そこで、状態方程式の無次元化によるスケーリング<sup>(1)</sup>を行う。以下にその変換係数を示す。

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \gamma = \frac{\omega_n}{\Omega_n}$$

$$\xi = \frac{d}{2\sqrt{m_1 k_1}} \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\bar{\bar{q}}_1 = \Omega_n^2 \bar{q}_1 \quad \bar{\bar{q}}_1 = \Omega_n \dot{\bar{q}}_1 \quad \bar{\bar{q}}_1 = \bar{q}_1$$

$$\bar{\bar{u}} = m_1 \Omega_n^2 u$$

$$\bar{\bar{q}}_2 = \Omega_n^2 \bar{q}_2 \quad \bar{\bar{q}}_2 = \Omega_n \dot{\bar{q}}_2 \quad \bar{\bar{q}}_2 = \bar{q}_2$$

$$\bar{\bar{v}} = v$$

ただし、

$\Omega_n$  : バネ上質量の固有振動数

$\omega_n$  : バネ下質量の固有振動数

$\xi$  : バネ上質量の減衰比

$\gamma$  : 固有振動数比

$\mu$  : 質量比

以上により無次元化状態方程式は、

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} + G\bar{v} \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2\xi & 2\xi \\ \frac{1}{\mu} & -\left(\frac{1}{\mu} + \gamma^2\right) & \frac{2\xi}{\mu} & -\frac{2\xi}{\mu} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\mu} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma^2 \end{bmatrix}$$

となり、スケール変換後の状態変数は

$$x = [q_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$$

である。ここで、以下に示す2つの問題を設定する。

問題1 : 制御系の設計には最適レギュレータを用い、変位外乱  $v$  は白色雑音作用する場合を想定する。2次形式評価関数として次式を考える。

$$J = J_x + J_u \quad (3)$$

ここで、 $J_x, J_u$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$J_x = E[x^T Q x] \quad (4)$$

$$J_u = E[r u^2] \quad (5)$$

ただし  $E[\cdot]$  は期待値を示す。さらに、アクチュエータとしては同容量 (出力が同じ) のものを用いると仮定して、操作量の2乗積分値が指定された値以下となるようにする。つまり

$$Pow = \frac{J_u}{r} = E[u^2] \leq pow^* \quad (6)$$

と定義すると、 $Pow$  の値をある値以下に保ったまま (3)式を最小にする制御則 ( $Pow$  が一定のもとで (4)式を最小にすることに等価である) を求めることを第一の問題とする。

問題2 : 問題1での最適制御を前提として、(3)式の  $J$  の値を最小にするパッシブ要素  $k_1, d$  を求めるこ

と。ただし、無次元化状態方程式(2)式においては、パラメータは  $\zeta$ ,  $\gamma$  となる。

問題1と問題2を同時に解く解析的方法は確立されていない。なぜならば、問題1を解いた後に問題2を解くと(2)式中の変数を変更されて制御対象が変化する。この時点で問題1における制御則は最適性を失うことになる。これを解決するため、次節で繰り返しアルゴリズムを提案する。

### 3. 感度関数<sup>(4)</sup>に基づく計算アルゴリズム

以下に前節の問題を解くための4ステップからなる繰り返し計算アルゴリズムを示す。パッシブ系のパラメータ(以下、設計変数と呼ぶ)としては無次元化状態方程式(2)式をベースとするため  $\zeta$ ,  $\gamma$  とする。

STEP 1 : 評価関数  $J$  を最小にする制御則は

$$u = -r^{-1}B^T P = -Kx \quad (7)$$

であり、 $P$  は次式のリカッチ方程式の解である。<sup>(6)</sup>

$$A^T P + PA + Q - r^{-1}PBB^T P = 0 \quad (8)$$

また、(4), (5), (6)式は次式のように表せる<sup>(3),(5),(6)</sup>。

$$J_x = \text{trace}[P_1 G G^T] \quad (9)$$

$$J_u = \text{trace}[P_2 G G^T] \quad (10.1)$$

$$= \text{trace}[r K X K^T] \quad (10.2)$$

$$Pow = \text{trace}[K X K^T] = \frac{1}{r} J_u \quad (11)$$

上式において、 $P_1$ ,  $P_2$ ,  $X$  は次式のリカッチ方程式の解である。

$$P_1 S + S^T P_1 + Q = 0 \quad (12)$$

$$P_2 S + S^T P_2 + K^T r K = 0 \quad (13)$$

$$X S^T + S X + G G^T = 0 \quad (14)$$

$$S = A - BK \quad (15)$$

(11)式の値をある値以下にするために評価関数の重み  $r$  の値を調整するアルゴリズムを用いる<sup>(7)</sup>。(11)式が設定値  $Pow$  より大きいならば評価関数中の重み  $r$  を大きくし、その逆の場合は  $r$  を小さくする。調整方法は次式である。

$$r_{i+1} = \frac{\text{trace}[K_i X_i K_i^T]}{Pow} r_i \quad (16)$$

$i$  は繰り返し数で、(16)式により重み  $r$  が変化するので、その都度(8)式および(12)~(15)式を解き直して(9)式の  $J_x$  を求めることになる。(このアルゴリズムでは  $Pow$  は与えられた上限にほぼ等しくなるため、 $J_x$  と  $r$  より  $J$  の値が定まる)

STEP 2 : 構造系パラメータを調整するための手順となるが、STEP 1の制御則を前提に設計変数に対する  $J_x$  の感度関数を計算する。その手順は設計変数を  $p$  とすれば(9)式を設計変数  $p$  で偏微分したものである<sup>(3)</sup>。

$$\frac{\partial J_x}{\partial p} = \text{trace} \left\{ \frac{\partial P_1}{\partial p} G G^T + P_1 \frac{\partial G}{\partial p} G^T + P_1 G \frac{\partial G^T}{\partial p} \right\} \quad (17)$$

ここで  $G$  の感度は設計変数  $p$  の偏微分したもので簡単に求まり、 $P_1$  についての感度は(12)式を  $p$  で偏微分することで得られる。つまり、

$$\frac{\partial P_1}{\partial p} S + S^T \frac{\partial P_1}{\partial p} + P_1 \frac{\partial S}{\partial p} + \frac{\partial S^T}{\partial p} P_1 = 0 \quad (18)$$

ここで  $S$  についての感度は、(15)式を  $p$  で偏微分すればよい。

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial p} - B \frac{\partial K}{\partial p} \quad (19)$$

(19)式に含まれる  $K$  についての感度は(7)式を  $p$  で偏微分すれば求められる。

$$\frac{\partial K}{\partial p} = -r^{-1} B^T \frac{\partial P}{\partial p} \quad (20)$$

(20)式の  $P$  の感度は、(8)式を  $p$  で偏微分すれば良い。すなわち

$$S^T \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P}{\partial p} S + \left( \frac{\partial A^T}{\partial p} P + P \frac{\partial A}{\partial p} \right) = 0 \quad (21)$$

リヤプノフ方程式(21)式を解けば  $P$  の感度が計算できる。これと(19), (20)式により  $S$  の感度が求められ、リヤプノフ方程式(18)式から  $P_1$  の感度が計算される。

STEP 3 : STEP 2 で求めた感度関数を用いて、 $J_x$  が減少方向に向かうような設計変数  $p$  を探索する。探索には次式の最大傾斜法<sup>(1)</sup>を用いる。

$$p_{\text{new}} = p_{\text{old}} - \alpha \frac{\partial J_x}{\partial p_{\text{old}}} \quad (22)$$

$\alpha$  はステップ幅、添え字の new は変更後、old は変更前を表す。設計変数に拘束条件を設ける場合には、(9)式の目的関数  $J_x$  に対してペナルティ関数<sup>(1)</sup>を付け加え修正目的関数  $J^*$  を設定する。すなわち、

$$J^* = J_x + h \sum_{i=1}^2 [g_i(p)]^2 \rightarrow \text{Min} \quad (23)$$

$g_i(p)$  : 拘束条件

$$\begin{cases} g_i(p) < 0 \rightarrow [g_i(p)] = g_i(p) \\ g_i(p) \geq 0 \rightarrow [g_i(p)] = 0 \end{cases}$$

$h$  : ペナルティ係数

$i$  : 拘束条件数

として、拘束条件の付かない問題に変換する。この

拘束条件の詳細については後述する。

STEP 4 : STEP 1にもどり、また重み  $r$  の調整により  $Pow$  を一定にするシステム変更後の制御則を求める。次に  $J_x$  の収束判定を行い、収束条件を満たせば計算終了、満たしていなければSTEP 2に進む。

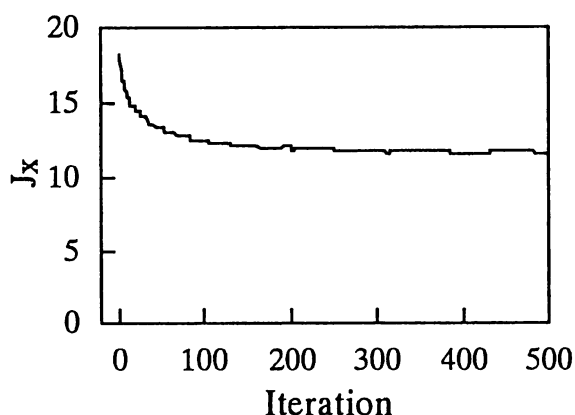


Fig. 3 Performance index  $J_x$ /Iteration

#### 4. 制約条件の付かない最適化問題<sup>(8)</sup>

3節の繰り返し計算アルゴリズムを用いて計算した結果を示す。ただし、ここではパッシブ系のパラメータに拘束条件を設けず  $J_x$  を最小にするパラメータを探索する。物理パラメータは、 $m_1 = m_2 = 50$  [kg],  $d = 418.3$  [Ns/m],  $k_1 = 2.96 \times 10^5$  [N/m],  $k_2 = 6.22 \times 10^6$  [N/s]として、(6)式で定義した操作量のパワー  $Pow$  を0.3以下になるようにし、重み行列  $Q$  は  $\text{diag}(10, 0, 0, 0)$  とした。また、設計変数は、バネ上質量系の減衰比  $\zeta$  と、バネ上質量系とバネ下質量系の固有振動数比  $\gamma$  とする。従って、調整するパッシブ要素はバネ定数  $k_1$  と粘性減衰係数  $d$  であるが、設計変数  $\zeta, \gamma$  の値から計算して導かれる。なお、数値計算には Math Work 社の Mathintosh MATLAB を使用した。

計算は500回繰り返した。そのときの  $J_x$  の変化を Fig. 3 に示す (この間  $Pow$  の値は0.3を維持している)。初期値に比べ十分減少しているのと同じ操作量で外乱  $v$  に対し状態変数  $q_1$  の変化を抑えていることがわかる。Fig. 4 には設計変数である  $\zeta, \lambda$  の計算経過を示す。Fig. 5 には  $\zeta, \gamma$  から計算したパッシブ

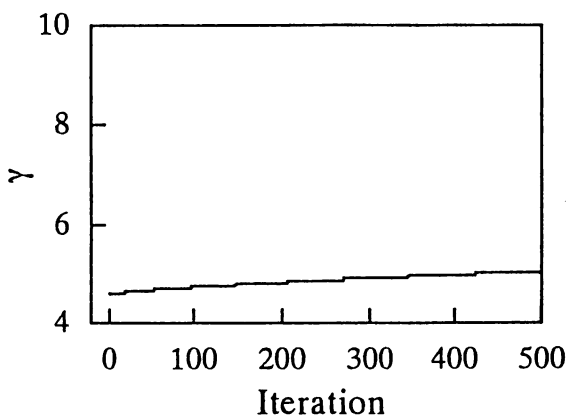
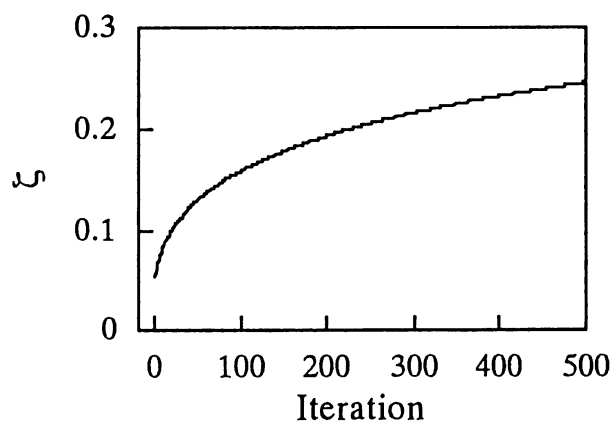


Fig. 4 Design parameter/Iteration

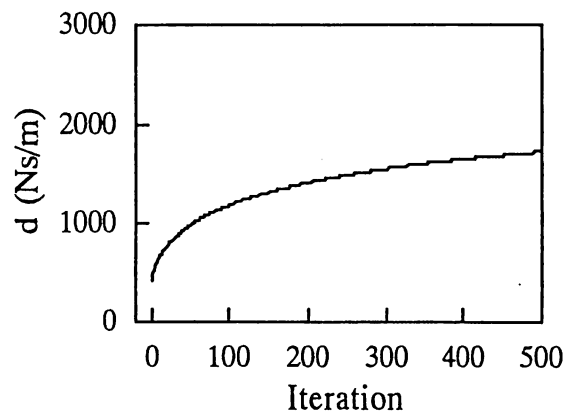
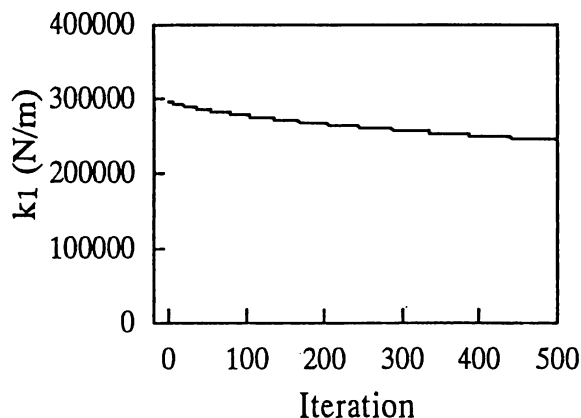


Fig. 5 Passive parameter/Iteration

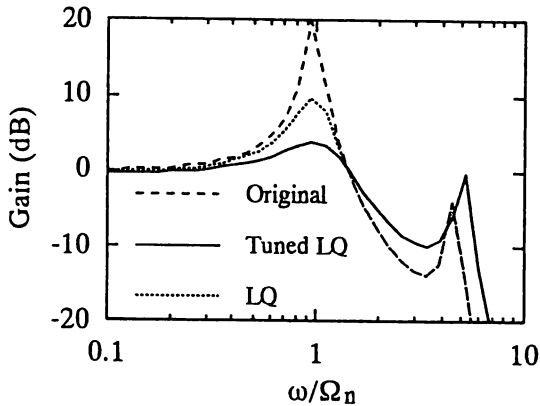


Fig. 6 Gain characteristics of transfer function

要素である  $k_1$ ,  $d$  の値を示す。 $k_1$  にはあまり変化が見られないが  $d$  は上昇しており、これは  $\xi$  が上昇した結果に対応し、調整により減衰を増大させたことを示す。Fig. 6 は変位外乱  $v$  からバネ上質量系  $q_1$  へのゲイン特性を示したものであり、制御の無い場合 (Original) と、パッシブ要素の定数値に変更のない制御システム (LQ) と、本アルゴリズムによる計算後のパッシブ要素の値を持つ制御システム (Tuned LQ) との比較である。図よりわかることは、本アルゴリズムにより求められた制御システム (Tuned LQ) は  $J_x$  を減少させ、第一共振点のゲインを低下させているのにも関わらず一部の高周波領域の周波数特性が制御なしの開ループより悪くなっていることである。

### 5. 制約条件付き最適化問題

本アルゴリズムで得られた制御システム (Tuned LQ) が閉ループ系の周波数特性の点から必ずしも望ましいものと言えないことが4節の結果から分かる。これは、本アルゴリズムが同時最適化問題の大域的最小解を与える保証がないことと、評価関数が時間領域であるので意味ある周波数領域で改善されるかどうか分からないためだと考えられる。従って、拘束条件の付加により、付加する前とは異なる極小解に収束させ、ゲイン特性が低下する周波数領域をある程度限定することができると思われる。一般にバネ定数は支持剛性であるが、これを低下させれば cut-off 周波数が下がり振動絶縁の向上が期待できる。また、粘性減衰係数が大きくなると共振モードの減衰に貢献するが逆に高周波領域の振動伝達率を増大させてしまうため操縦性、安定性、乗り心地性間の trade-off で値を調整する必要がある<sup>(9)</sup>。

そこで、パッシブ要素を最適化するために、周波数特性に寄与する減衰率  $\xi$ , 固有振動数比  $\gamma$  を設計変数として、3節の繰り返し計算アルゴリズムを用い、これらの設計変数に拘束条件を設けて  $J_x$  を最小にするパッシブ要素を探索する。設計変数の拘束条件に関しては(23)式より

$$g_1(\xi) = 0.2 - \xi \geq 0 \quad g_2(\gamma) = \gamma - 8 \geq 0$$

とする。 $\xi$  を大きくしない拘束は一見制振の目的と矛盾するよう見えるが  $\xi$  はあくまで他のファクターとの関連で決められるべきであり、ここでは数回の試行の結果このように拘束条件を設定した。ただし、 $\xi$  の初期値は0.05,  $\gamma$  の初期値は4.58で、バネ下質量系の固有角周波数  $\omega_n$  は一定である。その他の計算条件およびモデルの物理パラメータは前節と同じである。 $J_x$  の計算経過を Fig. 7 に示す。初期値に比べ減少していることより制振効果が得られている。(単調減少でないのはペナルティ関数の導入による) Fig. 8 に設計変数  $\xi$ ,  $\gamma$  の計算経過を示す。設計変数  $\xi$ ,  $\gamma$  ともにペナルティ法により設定した拘束条件を満たしていることがわかる。Fig. 9 は設計変数から計算されたパッシブ要素である  $k_1$ ,  $d$  の計算経過を示す。どちらも、初期値に比べ計算後は減少しており、拘束条件の効果によるものである。4節の拘束条件のない場合を Case 1, 拘束条件付きの場合を Case 2 として設計変数, パッシブ要素, 評価関数の収束値を Table 1 に示す。計算後の制御系 (Case 2) が評価関数  $J_x$  の上では、Case 1 より小さな値に収束しているのが明らかとなったが、果たして、周波数特性ではどうか検討してみる。そこで、Fig. 10の外乱  $v$  から  $q_1$  までのゲイン特性をみると拘束条件付きの制御システム (Tuned LQ) は、広範な周波数領域にわたりゲイン特性が改善されているのがわかる。Fig. 11には  $q_1$  に関する還送差

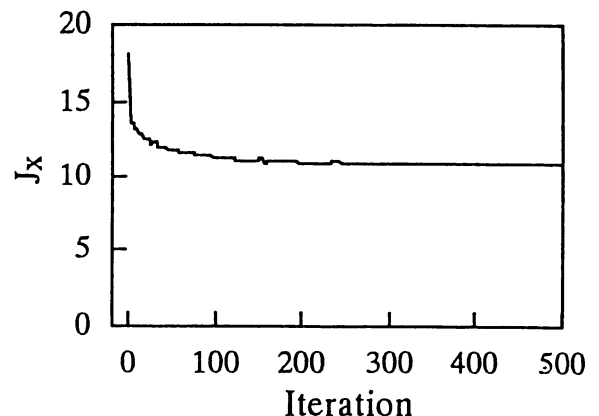


Fig. 7 Performance index  $J_x$ /Iteration

パッシブ要素の調整を伴うアクティブサスペンション系の最適制御設計

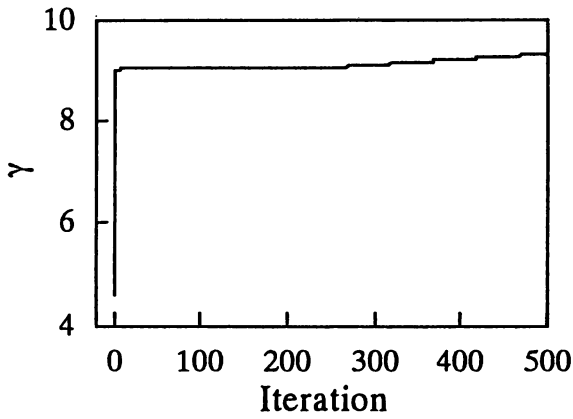
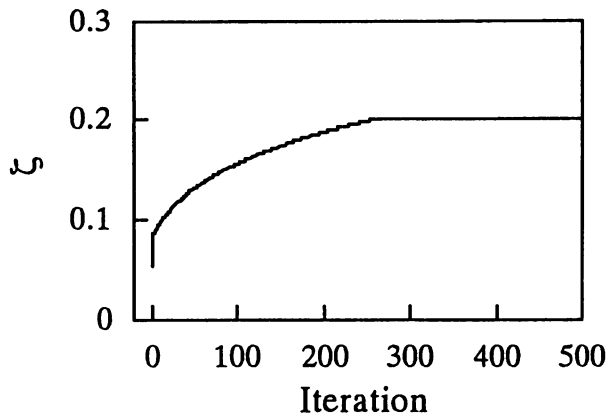


Fig. 8 Design parameter/Iteration

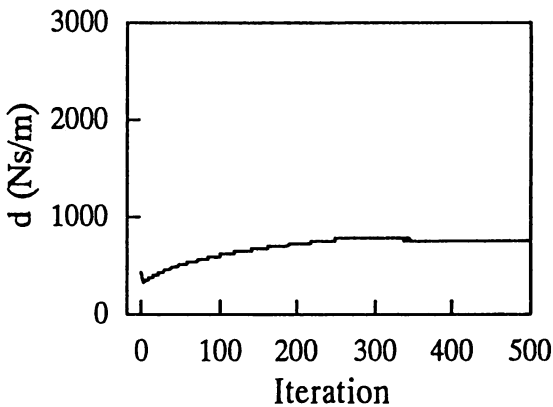
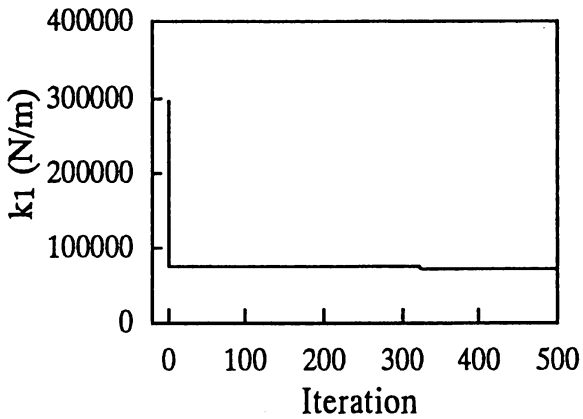


Fig. 9 Passive parameter/Iteration

	Initial value	Case 1	Case 2
$k_1$ [N/m]	$2.96 \times 10^5$	$2.44 \times 10^5$	$7.59 \times 10^4$
$d$ [Ns/m]	418.3	1713	780
$\zeta$	0.05	0.24	0.20
$\gamma$	4.58	5.04	9.33
$J_x$	18.1	11.5	10.8

Table 1 Values of converged Parameter/Performance

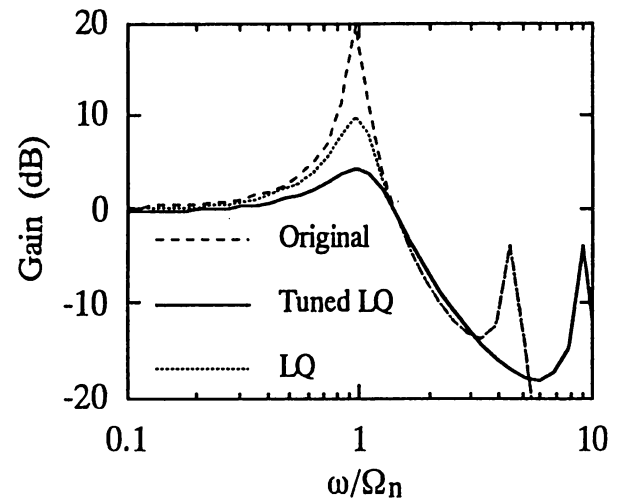


Fig. 10 Gain characteristics of transfer function from  $v$  to  $q_1$

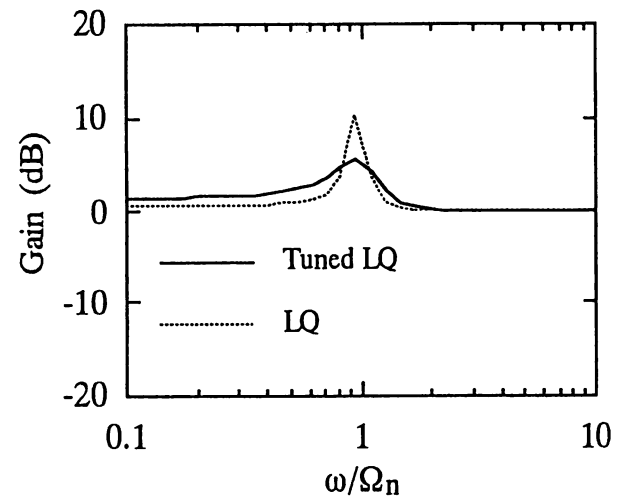


Fig. 11 Return difference

イン特性を示す。最適化された制御システム (Tuned LQ) は還送差ゲインが大きいため低感度であることがいえる。以上の結果より、本アルゴリズムを用いることにより、拘束条件の設定と試行錯誤を要するものの制御系を最適化し、閉ループシステムの周波数特性を考慮しながらパッシブ要素の最適値を探索することができることを示した。

## 6. おわりに

アクティブサスペンションシステムの設計変数に拘束条件を設定し、制御系と構造系のパラメータを同時に最適化する繰り返しアルゴリズムを提案した。得られた結果をまとめると以下ようになる。

- (1)  $J_x$  の低減化だけでシステム全体の性能評価とするのは問題であり、特に閉ループゲイン特性はある周波数領域で改善されない場合がある。
- (2) 閉ループゲイン特性の改善を目的に、設計変数に拘束条件を付けることにより同容量のアクチュエータでも広範な周波数領域にわたり望ましいゲイン特性を得ることができた。
- (3) 本方法を用いれば、制御系と構造系の設計自由度の双方に対し閉ループ系の周波数特性を考慮しながら  $J_x$  を最適化 (低減化) することが可能である。

本方法の繰り返しアルゴリズムの中で最小値探索に最大傾斜法を用いており、これは収束性が証明されていない。また、制御対象が多自由度系に拡張され

た場合、構造系の特性値である設計変数の選択とそれに対する拘束条件を定めることが困難になると考えられる。このようなシステムの同時最適化設計には周波数依存型の最適レギュレータ<sup>(10),(11)</sup>を用いる必要があるかもしれない。これらの点については今後の課題である。

## 文 献

- (1) 山川, 最適化デザイン, 培風館
- (2) 岩壺, 河村, 安達, 機械学会論文集(C), 59-559, (1993), 631/636
- (3) 梶原, 長松, 計測自動制御学会論文集, 26-10, (1991), 1140/1147
- (4) 梶原, 長松, 機械の研究, 43, (1991), 351/356
- (5) G. Obinata, H. Inooka, IEEE, Trans. Automat. Contr., 22-4, (1977), 676/677
- (6) B. Kurtaran, M. Sidar, IEEE, Trans. Automat. Contr., 19-6, (1974), 589/590
- (7) R.E. Skelton, Dynamic System Control, John Wiley & Sons, 1988
- (8) 木沢, 大日方, 土岐, 土田, D & D '93 シンポジウム講演論文集, 930-42, (1993), 226/229
- (9) 永井, 計測と制御, 32-4, (1993), 290/295
- (10) 池田, システム/制御/情報, 34-6, (1990), 340/346
- (11) 土居, 他 3 名, 日本機械学会論文集(C), 58-549, (1992), 1392/1398