

線形理論に基づく翼形設計計算システムの開発

伊藤 惇・海 銓 光 昭*・根 元 誠**

Development of Calculation System for Hydrofoil Section Design on the Basis of a Linearized Theory

Mitsuaki KAIHOKO, Jun ITO and Makoto NEMOTO

(1995年11月30日受理)

In existing theories of hydrofoil section design, only the accuracy has been regarded as essential, and the design theories developed from a point of view of possibility of future growth are not found.

In this paper a construction of a hydrofoil section design calculation system is aimed at by using an analytical method on the basis of linearized theory for hydrofoil with thin section so that such generalized or complex problems as shear flow, cavity flow and co-existing flow can be solved.

1. はじめに

せん断流中の翼あるいはせん断流中においてキャビテーション（以下空洞という）現象を伴う翼についての研究は、その重要性は周知のことであり、われわれの研究室の成果として二次元理論[1,2,3]や三次元理論[4~11]について既に公表してある。しかしこれらはいずれも翼や空洞の特性を求める方法についての理論であり、もう一つの重要なテーマである設計問題については全く未解決のままである。すなわちせん断流や空洞現象あるいはこの両方を考慮した二次元翼や三次元翼の設計法を確立することは、緊急かつ重要な命題と考えられる。

翼形の設計に関する研究については、非粘性流れでは等角写像を用いた守屋ら[12]によるもの、翼表面上に渦を分布させる境界要素法を用いた Lewis によるもの[13]、粘性を考慮したものには Meauge によるもの[14]、具体的に開発された翼形としては Liebeck 翼形[15]、Wortmann 翼形[16]などがある。一方圧縮性流れでは、衝撃波なしで圧縮効果を期待できる Peaky 型圧力分布を持つもの[17,18]、弱い衝撃波を伴う Whitcomb 型圧力分布を持つもの[19]などがある。

しかしながらこれらはいずれも個々の問題の精度を重要視したもので、理論の発展性という観点から扱ったものは見あたらない。従って解析的に扱ったものはほとんどなく Csanady のテキスト[20]と Sholtz[21]に見られる程度である。よって本研究はせん断流、空洞現象あるいはこれらを複合した問題などの一般的かつ複雑な問題へ拡張できるように薄翼理論を基礎とした解析的な方法による翼形設計計算システムを構築する。

2. 翼形表面上の圧力係数と無次元速度

本設計問題では翼形表面上に圧力係数 C_p の分布を与え、反り曲線の座標 y と厚み分布 z を求める方法をとる。

さて、圧力係数 C_p は次の式で定義される。

$$C_p = \frac{P_s - P_0}{\frac{1}{2}\rho C_0^2} \quad (1)$$

ここで、 P_s 、 P_0 、 ρ 、 C_0 は、翼形表面上の圧力、主流の圧力、流体密度、主流の速度である。翼形表面上の圧力 P_s を翼形上面と下面で P_{s+} と P_{s-} とし、 C_{s+} と C_{s-} をそれぞれ翼形上面及び下面の表面速度とすると(図1)、主流と翼形表面上の任意点との間に適用したベルヌーイの定理は次のようになる。

* 秋田高専専攻科学生

**秋田高専本科学学生

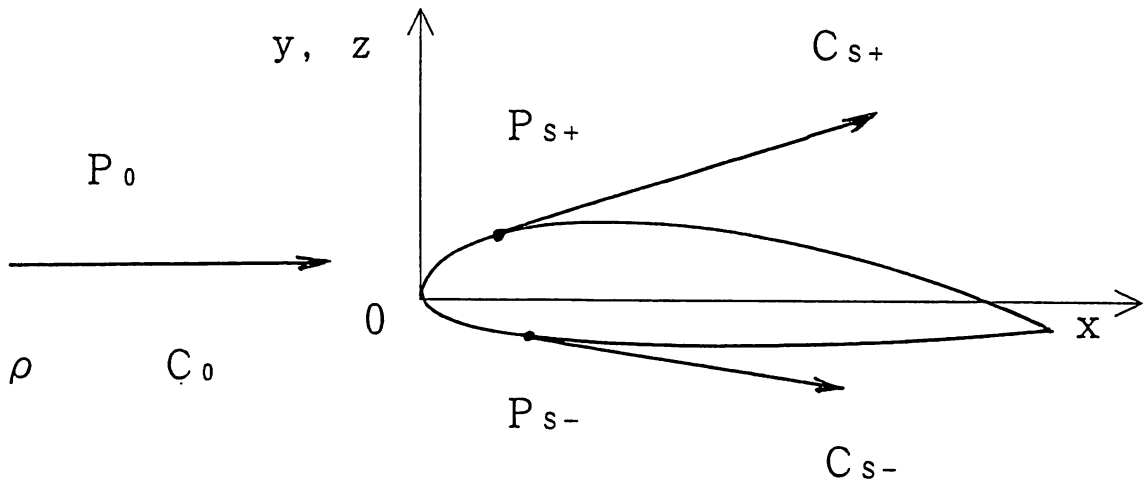


図1 記号の説明

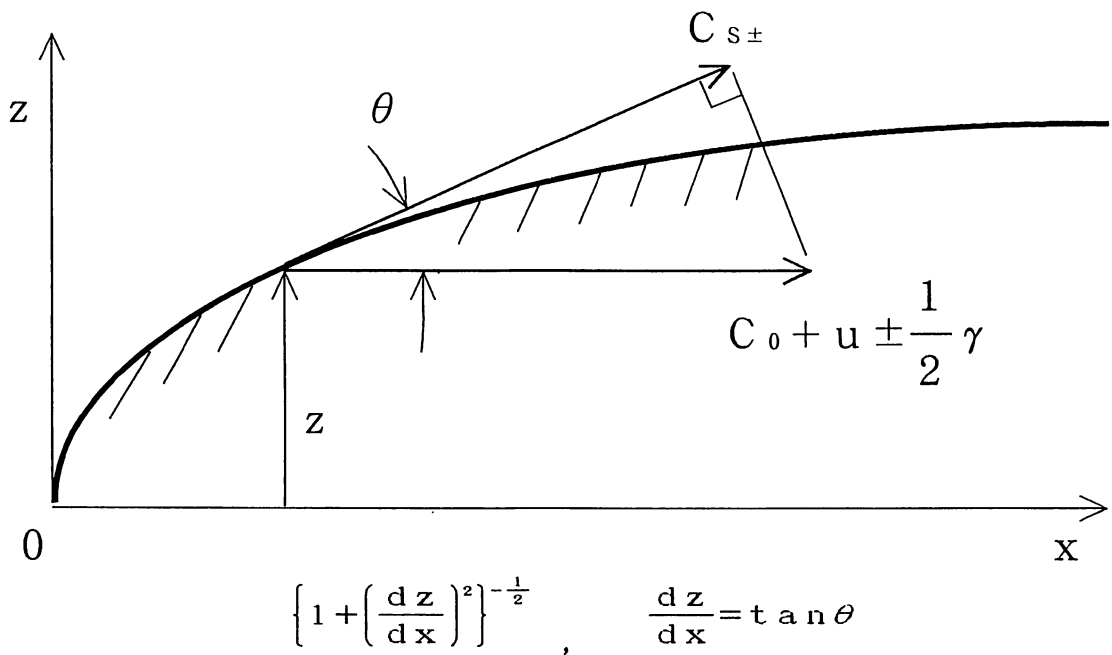


図2 リーゲルス・ファクタ

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho C_0^2 = P_{s\pm} + \frac{1}{2}\rho C_{s\pm}^2 \quad (2)$$

よって翼形表面上の圧力係数は翼形表面上の速度により表され、次の関係が成り立つ。

$$\frac{P_{s\pm} - P_0}{\frac{1}{2}\rho C_0^2} = 1 - \left(\frac{C_{s\pm}}{C_0}\right)^2 \quad (3)$$

ここで、左辺の圧力係数は通常 1 より小さいので、翼形表面上の無次元速度 $C_{s\pm}/C_0$ は式(3)より次のようになる。

$$\frac{C_{s\pm}}{C_0} = \sqrt{1 - \frac{P_{s\pm} - P_0}{\frac{1}{2}\rho C_0^2}} \quad (4)$$

一方、翼形表面上の速度 $C_{s\pm}$ は、翼厚により誘起される速度 u 、迎え角および反り分布により誘起される速度と等しい値を持つ渦分布 γ 、および主流の速度 C_0 の和として次のようにも表示される。

$$C_{s\pm} = C_0 + u \pm \frac{1}{2}\gamma \quad (5)$$

しかしながら、この式は翼前縁近傍の曲率の大きいところで精度が低下することが知られており、次のように修正することが *Riegels* によって提案された(図 2)。すなわち翼形表面の無次元速度 $C_{s\pm}/C_0$ は z を翼厚分布とすると次のようになる。

$$\frac{C_{s\pm}}{C_0} = \frac{1 + \frac{u}{C_0} \pm \frac{\gamma}{2C_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \quad (6)$$

3. 翼厚分布の計算法

翼形上面と翼形下面の表面無次元速度はそれぞれ式(6)より次の 2 つの式のようにになる。

$$\frac{C_{s+}}{C_0} = \frac{1 + \frac{u}{C_0} + \frac{\gamma}{2C_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \quad (7)$$

$$\frac{C_{s-}}{C_0} = \frac{1 + \frac{u}{C_0} - \frac{\gamma}{2C_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \quad (8)$$

これを辺々加えると、 u/C_0 の式を求めることができる。すなわち、

$$\frac{u}{C_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{C_{s+}}{C_0} + \frac{C_{s-}}{C_0} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} - 1 \quad (9)$$

また、翼の厚みによる誘起速度は、翼の厚みを代表する吹き出し分布 $\sigma(x)$ により次のようにも表すことができる。

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\sigma(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (10)$$

また吹き出し分布と翼の厚み勾配との間には流れの連続性から次の関係がある。

$$\sigma(x) = 2C_0 \frac{dz}{dx} \quad (11)$$

よって式(10)に式(11)を代入することにより、 u/C_0 は次式となる。

$$\frac{u}{C_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (12)$$

翼厚勾配は、一般に次のように級数展開できる。

$$\frac{dz}{dx} = B \cot \frac{\theta}{2} + B^* \tan \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (13)$$

ここで第 1, 2 項は翼前縁と翼後縁の丸みを表す。また第 3 項以降はフーリエの正弦級数と考えることができる。

式(13)を式(12)に代入して多少計算すると、次の式が得られる。

$$\frac{u}{C_0} = B - B^* - \sum_1^{\infty} B_n \cos n\theta \quad (14)$$

翼後縁が薄い場合は後縁に丸みがなく、

$$B^* = 0 \quad (15)$$

また、翼が閉じる条件から次式が成り立つ。

$$\int_0^l \frac{dz}{dx} dx = 0 \quad (16)$$

式(16)に式(13), (15)を代入し計算すると、

$$B_1 = -2B \quad (17)$$

となる。よって、 B を改めて B_1 とおくと、吹き出しによる誘起速度の式(14)は次のようになる。

$$\frac{u}{C_0} = B_1 (1 + 2 \cos \theta) - \sum_2^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (18)$$

式(18)は、翼形表面上の圧力分布から式(4)によって求めた翼形表面速度を式(9)に代入して得られる u/C_0 を与えて、係数 B_n を定めるための連立方程式である。すなわち B_n を求めるために、未知数 B_n と同じ数すなわち n 個の選点を θ 及び u/C_0 に代入すると、 B_n に関する n 元の連立一次方程式が得られる。実際の計算においては、 B_1 から B_9 までの 9 個の係数を求めることにし、9 元の連立方程式を組み立ててこれをガウスの消去法により解く。翼厚勾配は、式(13), (15), (17)より整理すると、次のようになる。

$$\frac{dz}{dx} = B_1 \left(\cot \frac{\theta}{2} - 2 \sin \theta \right) + \sum_2^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (19)$$

式(17)を x についての積分

$$z = \int_0^x \frac{dz}{dx} dx \quad (20)$$

を行うために、公式 ($n \geq 2$)

$$\int \sin n\theta \cdot \sin \theta d\theta = -\frac{\sin \{(n+1)\theta\}}{n+1} + \frac{\sin \{(n-1)\theta\}}{n-1} \quad (21)$$

を用いると、最終的に翼厚分布は次式のようになる。

$$\frac{z}{l} = \frac{1}{2}B_1 \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + \frac{1}{4} \sum_2^{\infty} B_n \left[\frac{\sin \{(n-1)\theta\}}{n-1} - \frac{\sin \{(n+1)\theta\}}{n+1} \right] \quad (22)$$

4. 反り曲線の計算法

式(7), (8)を辺々引くと次のように渦分布 γ に対する式が得られる。

$$\frac{\gamma}{2C_0} = \left(\frac{C_{s+}}{C_0} - \frac{C_{s-}}{C_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2}} \quad (23)$$

また渦度分布は次のように級数展開できる。

$$\frac{\gamma}{2C_0} = A \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (24)$$

式(18)において B_n を求めたときと同様に、式(24)の左辺に式(23)により得られる値を代入し連立方程式を導きこれをガウスの消去法によって計算すると A, A_n が求まる。

一方、反り曲線の勾配は渦分布 γ と次の関係を持っている。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{C_0} \frac{d\xi}{x-\xi} \quad (25)$$

式(25)は、式(24)を代入し計算を行うと次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = -A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (26)$$

よってこの式を x について積分すると、反り曲線は次式から得られる。

$$\frac{y}{l} = -\frac{1}{2}A(1 - \cos \theta) - \frac{1}{8}A_1 \cos \theta - \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\cos \{(1-n)\theta\}}{1-n} + \frac{\cos \{(1+n)\theta\}}{1+n} \right] \quad (27)$$

式(27)の反り曲線の座標は反り分布と迎え角を含んでいる。反り分布 y_c と迎え角 α を分離するには次のように行う(図3)。すなわち、翼の前縁と後縁の座標を $(0, y_1)$ (l, y_2) とすると、迎え角 α は次式により得られる。

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y_1 - y_2}{l} \right) \quad (28)$$

また反り分布 y_c は反り曲線の座標 y より次式で求められる。

$$y_c = y - y_1 + \frac{y_1 - y_2}{l} x \quad (29)$$

5. 標点位置と数

圧力分布を与える標点の選び方にはいろいろな方法が考えられるが、ここでは *Schlichting* の方法 [22] を応用して、圧力分布の一つの区間を分割している小区間の4分の3の位置の点を取る方法を用いる。すなわち圧力分布において翼弦長を3つの区間に分け、各区間 (x_a, x_b) で3点を次の計算式によって与える。

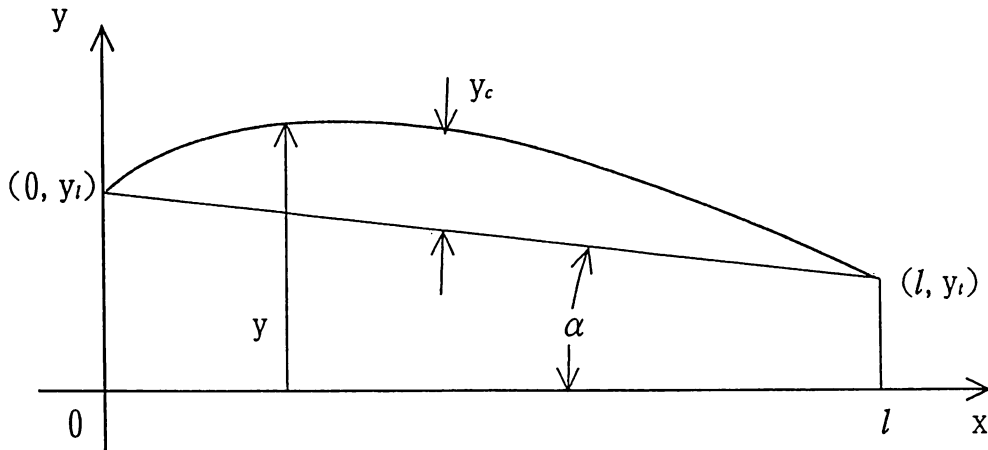


図3 反り分布と迎え角の分離

線形理論に基づく翼形設計計算システムの開発

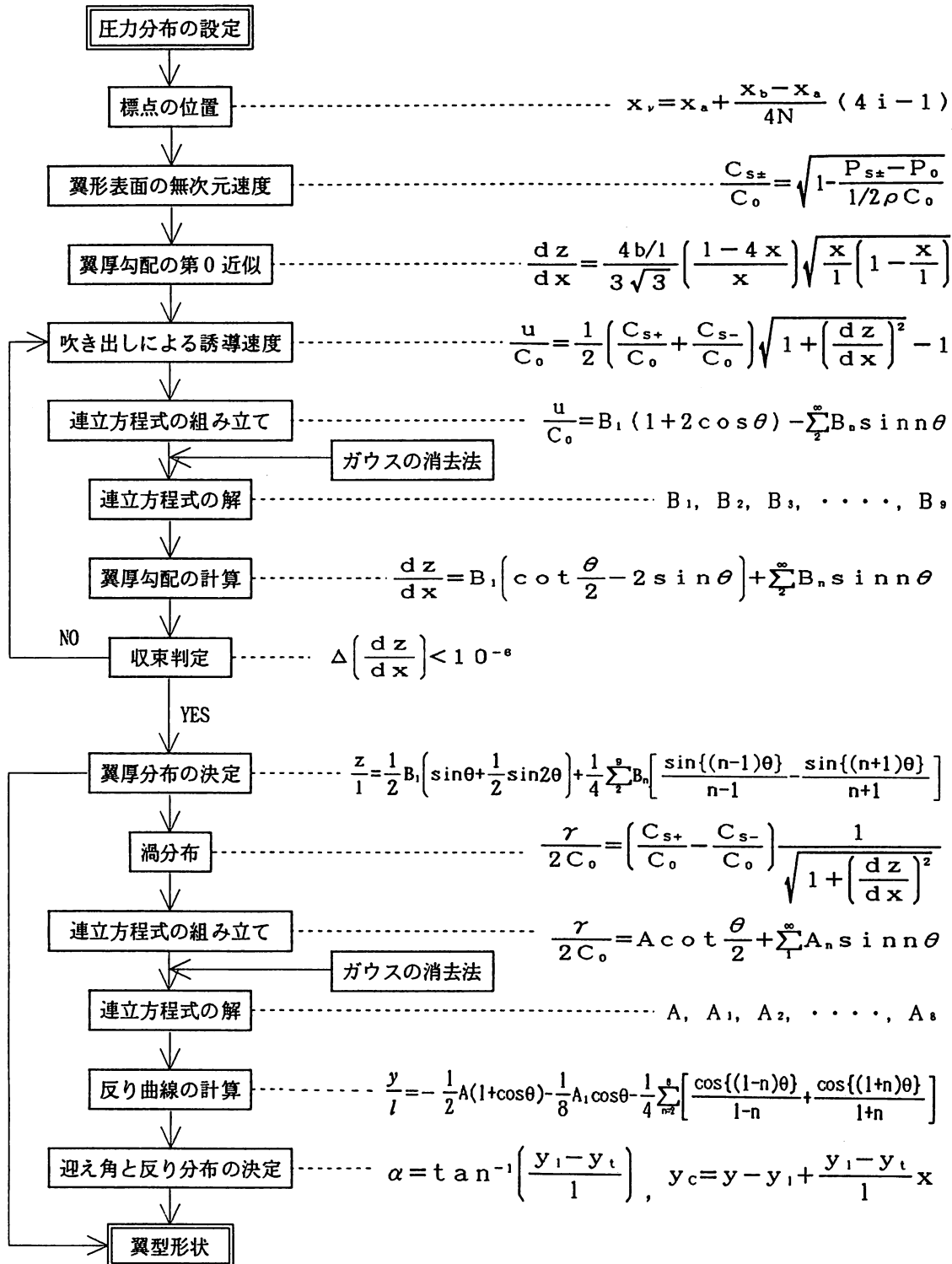
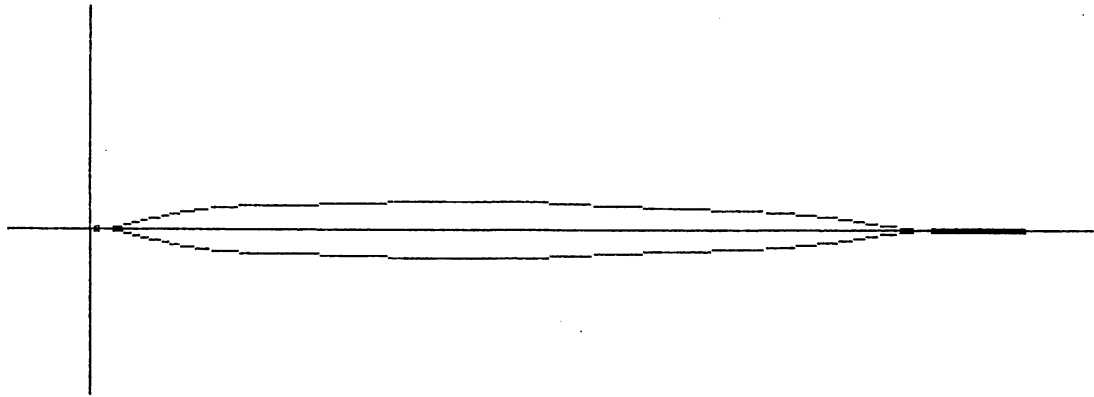
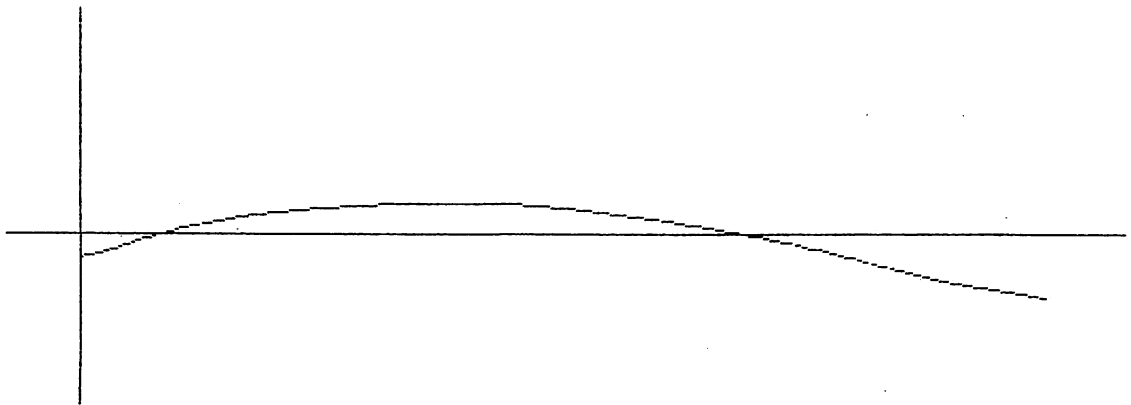


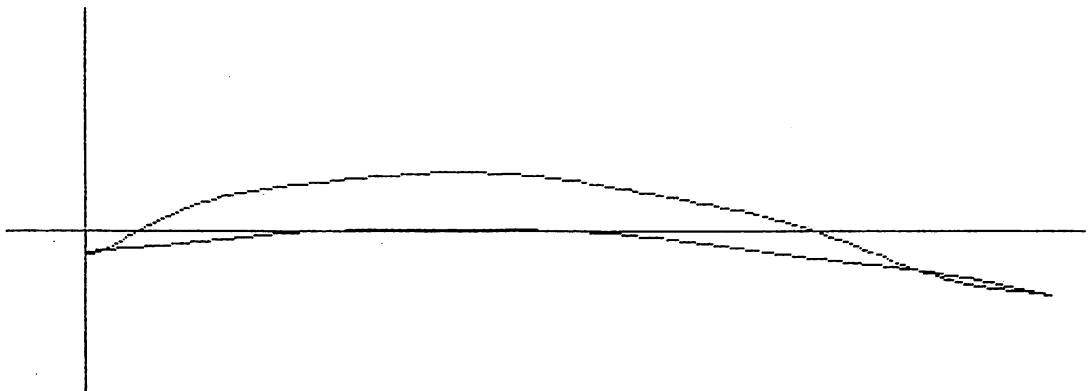
図4 計算システムのフロー



a) 厚み分布



b) 反り曲線



c) 翼形形状

図5 得られた翼形

$$x_v = x_a + \frac{x_b - x_a}{4N}(4i - 1), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (30)$$

6. 計算システムのフロー

次に翼形表面上に圧力分布を与えて最終的に翼形形状を決定するまでの設計計算システムをフローチャートで示す。(図4)

式(9)による u/C_0 の計算を行う場合、リーゲルスファクタに含まれる翼厚勾配が未知であるので、第零近似としてフローチャートに示す水滴形状を導入し以下フローチャートに示すループについて反復計算を行い、最終的にはその収束値の翼厚勾配を使用した。

7. 計算結果

本研究で提案している設計法は、翼形表面上に圧力分布を与えて反り曲線と翼の厚み分布を求め、反り曲線から反り分布と迎え角を分離して求める方法をとっている。

図6は与えた圧力分布である。この圧力分布の特徴は、翼背面の圧力係数が x/l が0.1から0.5の間で-1.2で一定値をとるようにしている点である。このことは翼背面が一般に負圧のピークとなり、これより空洞が発生することが多いため、一例としてこれを回避する目的で一定値としたものである。また正面側も一定値を与えているが、これには特に意味はなく実際の圧力分布が一定値に近いことから簡単のため一定値を与えた。

図5は、図6で与えた圧力分布を有する翼形形状を求めるために、本研究で提案している設計計算プログラムを用いてグラフィック上に翼形の厚み分布、反り曲線および翼形形状を作図したものである。

これらの作図結果から、翼の前縁と後縁では厚みがなく後縁側では図5-c)から明らかなようにわずかながら負の厚みが生じているなど、精度上に多少の問題を残しているものと考えられる。しかしながら次のことは言えるものと考えられる。すなわち図6で与えた圧力分布を有する翼形形状は翼の後縁の厚さが零に近いこと、また反りについてが図5-b)から明らかなようにやや前縁側で大きく、後縁側ではほぼ直線的になっていることである。

表1には図5の具体的な数値と得られた迎え角を示してある。

8. おわりに

本研究の内容は以下のように要約される。

- (1) 翼形表面上に与えた圧力分布からベルヌーイの定理を用いて翼形表面上の無次元速度を求め(式(1)~(4)),次に速度の和として得られる表面無次元速度の異なる表示から翼厚分布による誘導速度が *Riegels* ファクタを考慮した形で得られることを示した(式(5)~(9))。
- (2) 翼厚分布による誘導速度を既知として、吹き出し分布による誘導速度と翼厚勾配の級数展開から連立方程式を組み立て(式(9)~(18)),この解の反復法の収束値として得られた翼厚勾配とその積分から翼厚分布を決定した(式(9), (18)~(22))。
- (3) 翼形表面速度から定まる渦分布の値と、渦分布の級数展開から第2の連立方程式を組み立て(式(23)~(24)),本来は積分方程式である反り曲線の勾配に対する積分表示の2度の積分と連立方程式の解から反り曲線を決定した(式(23)~(27))。
- (4) 以上で決定された翼厚分布と反り曲線から、翼形形状、反り分布および迎え角を算出し(式(28)~(29)),本翼形設計計算システムの最後の段階として、これらを数値結果と共にコンピュータグラフィックスにより作図した。

本設計計算システムは2つの特徴を有しており、その第1の特徴は、最初に与えられた圧力分布から最終的に得られる翼形形状の作図までの一連の計算が1つのプログラムで連続的に処理されることから、非常に効率のよいコンピュータ上の対話型の翼形設計計算システムになっている。

第2の特徴は、本設計方法では一連の計算が解析的に行われており、既存の特性解析理論の追加修正により本来の目的であるせん断流、空洞現象、三次元問題あるいはこれらの複合問題へ、数値計算によらず理論解析によって容易に拡張する事ができる。

参考文献

- [1] 伊藤 惇,「指数せん断流中における薄翼の一特異点解法」,日本機械学会論文集, 57-543, pp. 3778-3782 (1991.11).
- [2] 伊藤 惇, 中村理一郎, 斎藤栄一,「指数せん断流の中におかれ超空洞を伴う翼の理論」,日本機械学会論文集, 58-549, pp. 1605-1610 (1992.5).
- [3] 伊藤 惇,「指数せん断流の中におかれ部分空

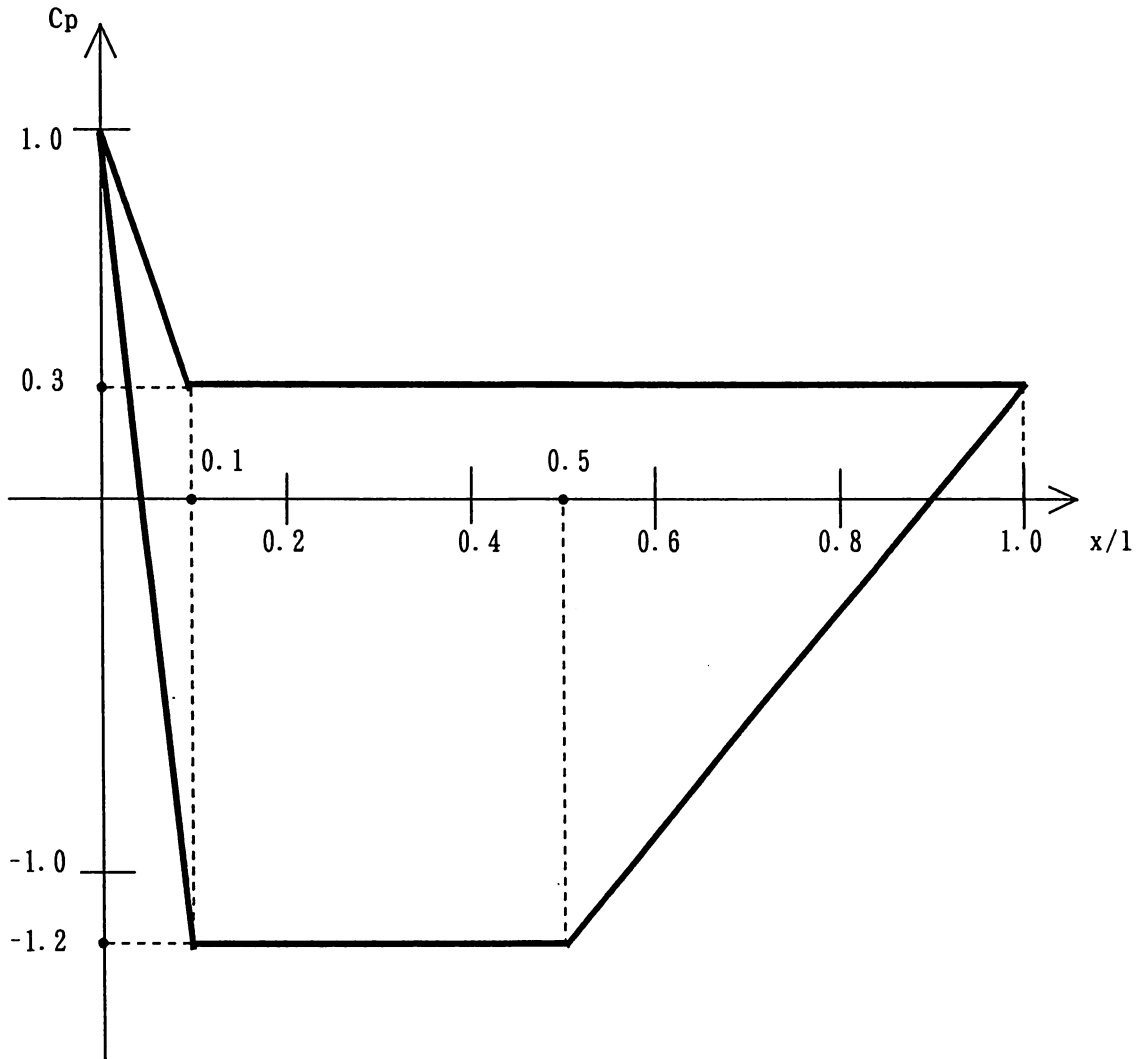


図6 与えられた圧力分布

- 洞を伴う翼の理論], 日本機械学会論文集, 58-554, pp. 3047-3052 (1992.10).
- [4] 伊藤 惇, 成田 章, 「せん断流中の超空洞翼のための揚力線理論」, 日本機械学会論文集, 57-537, pp. 1635-1639 (1991.5).
- [5] 伊藤 惇, 「せん断流中の超空洞翼のための揚力線理論 (続報, 部分空洞への応用)」, 日本機械学会論文集, 57-543, pp. 3783-3787, (1991.11).
- [6] 伊藤 惇, 成田 章, 中村理一郎, 「2変数せん断流中における超空洞翼の揚力線理論」, 日本機械学会論文集, 59-567, pp. 3393-3398 (1993.11).
- [7] 伊藤 惇, 「平行二平面間における超空洞翼の揚力線理論 (垂直方向せん断流の場合)」, ターボ機械, 22-3, pp. 147-153 (1994.3).
- [8] 伊藤 惇, 佐藤則喜, 高橋 勝, 「せん断流中における3次元薄翼の一特異点解法」, 日本機械学会論文集, 56-522, pp. 295-300 (1990.2).
- [9] 伊藤 惇, 「せん断流中にある超空洞翼の準三次元理論」, 日本機械学会論文集, 56-530, pp. 2871-2878 (1990.10).
- [10] Jun Ito, Teruaki Obata, Eiichi Saito, Susumu Hosoya, Seiki Yamaya, "Lifting-Line Theory for a Supercavitating Wing in Bounded Shear Flow", Proceeding of Cavitation and Multiphase Flow Forum, The First ASME·JSME Fluid Engineering Conference (Portland, USA), FED-Vol. 109, pp. 135-141 (1991.6).
- [11] 伊藤 惇, 「特異点法による部分空洞翼の流れ場の基礎式とその解法 (第7報, 三次元せん

表 1 翼形形状の数値

X	反り曲線	反り分布	厚み分布
0.0056	-0.0486	0.0005	-0.0004
0.1056	-0.0353	0.0225	0.0036
0.2056	0.0088	0.0753	0.0357
0.3056	0.0464	0.1216	0.0508
0.4056	0.0643	0.1481	0.0592
0.5056	0.0525	0.1450	0.0535
0.6056	0.0088	0.1100	0.0416
0.7056	-0.0515	0.0584	0.0171
0.8056	-0.1038	0.0148	-0.0061
0.9056	-0.1273	0.0001	-0.0015

迎え角 : 4 . 9 1 (degree)

断流)], 日本機械学会論文集, 57-536, pp. 1289-1296 (1991.4).

[12] 守屋, 石田, 「与えられた圧力分布を持つ翼型を求める一方法」日本航空学会誌, 9-81, pp. 56 (1942)

[13] R.I. Lewis, "A Method for Inverse Aerofoil and Cascade Design by Surface Vorticity", ASME Paper, No. 82-GT-154 (1982).

[14] G. Meauge, "Viscous-Inviscid Flow Interaction Method, Thermodynamics and Fluid Mechanics of Turbomachinery", Martumus Nijhoff Publishers, p. 385 (1985).

[15] R.H. Liebeck, "A Class of Airfoils Designed for High Lift in Incompressible Flow", J. Aircraft, 10-10, p. 610 (1973).

[16] F.X. Wortmann, "The Quest for High-Lift", AIAA Paper, no. 74-1018 (1974).

[17] P. Carabedian & D. Korn, "A Systematic Method for Computer Design of Super-critical Airfoils in Cascade", Comm. on Pure & Appl. Math., Vol. 24, p. 369 (1976).

[18] H.H. Pearcey & J. Osborne, "Some Problems and Features of Transonic Aerodynamics", ICAS Paper, No. 70-140 (1970).

[19] R.T. Whitcomb & L.R. Clark, "An Aerofoil Shape for Efficient Flight at Supercritical Mach Numbers", NASA TM X-1109 (1965).

[20] G.T. Csanady, Turbomachines, McGraw-Hill Book Company.

[21] N. Sholz, "Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern", VDI-Forschungs-h., 20-442, 1 (1954).

[22] H. Schlichting, "Berechnung der reibungslosen incompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter", VDI-Forschungs-h., 21-447, 1 (1955).