

内部流れ場の境界圧力算出法についての提案ノート

伊藤 惇・斎藤 光喜*

A Note on a Numerical Method of Boundary Pressure in Internal Flows

Jun ITO & Kohki SAITO

(1994年8月22日受理)

A boundary element method proposed by J.C. Wu, in which velocity components, vorticity and pressure are utilized as primary variables, is investigated to develop a numerical simulation program for various internal flow problems. We also found the above method to give extremely zigzag pressure solution, as already pointed out by Kaku et al, who resolved this troublesome hurdle by introducing a simple smoothing method. However, it seems to us that the simple smoothing could not necessarily give true pressure solution. In this paper, a rational numerical method to correct the pressure solution by J.C. Wu is proposed, on the basis of Navier-Stokes equation, total differential, least square method and Taylor expansion, by using the values of velocity field. Usefulness of this method is verified by comparing with exact solution of Couette flow.

1. 緒言

最近、高橋ら^{1,2,3)}は、油圧制御弁の設計に必要な基礎的資料を得る目的で、いろいろな形状の内部流れを明らかにするために、J.C. Wuら^{4,5)}による境界要素法を導入して数値解析を行った。又、郭ら⁶⁾は特にスプール弁の軸力補償バケットについてその最適形状を決定するための流れの数値解析に、やはり同様にJ.C. Wuの境界要素法を採用している。このようにJ.C. Wuらの方法が採用されているのは、積分方程式と、有限要素法で行われる離散化法とを組み合わせるこの方法が、計算精度と計算効率の点で優れていることがJ.C. Wuらの論文で示されていることによるものと考えられる。境界要素法による粘性流れ解析は、登坂らを中心とした日本人によって行われている系統的研究^{7,8)}についても良く知られている。

本研究ではこの種の研究を始める第一段階として、広く採用されているだけでなく数学的表現が具体的で比較的取っ付きやすいこともありJ.C. Wuらの手法を用いて粘性流れ場の数値計算を行った。

その結果、既に高橋ら¹⁾や郭ら⁶⁾によっても指摘されているが、速度に対する精度は良好であるものの、圧力の値については極端なジグザグを示し精度が悪かった。郭らはこの値をスムージングしてジグザグを解消しているが、単なるスムージングでは精度の良い解が得られる保証のないことは明らかである。そこで本研究では精度の良い圧力の値を合理的に求める方法として、精度の良い速度分布の値を使用することを提案する。すなわち、ナビエ・ストークス方程式に速度の値を取り込んで圧力勾配を求め、圧力に関する全微分式、テイラー級数、最小自乗法、ガウス・ザイデル法を組み合わせた圧力計算法を構築したので研究ノートとしてこれを報告する。

2. 基礎式

流れは、二次元、非圧縮、定常でかつ層流とし、外力は無視するものとする。速度場の求め方は、J.C. Wuらによって開発された方法と同じであるので、流速、渦度および圧力を基本変数とした境界要素法ということになる。すなわち、速度ベクトル \vec{v} 、渦度ベクトル $\vec{\omega}$ と全圧 h を変数として、流れの支配方程式を速度場と渦度場に分けて考える。

* 東京工業大学学生 (秋田高専卒業生)

速度場については次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \vec{v}(\xi) = \frac{1}{2\pi} & \left[\int_{\Omega} \frac{\vec{\omega}(s) \times \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Omega \right. \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\{\vec{v}(s) \times \vec{n}(s)\} \times \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Gamma \\ & \left. - \int_{\Gamma} \frac{\{\vec{v}(s) \cdot \vec{n}(s)\} \cdot \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Gamma \right] \end{aligned} \quad \dots(1)$$

また渦度場としては次式が成立する。

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(\xi) = \frac{1}{2\pi} & \left[\frac{1}{v} \int_{\Omega} \frac{\{\vec{v}(s) \times \vec{\omega}(s)\} \times \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Omega \right. \\ & + \int_{\Gamma} \frac{\{\vec{\omega}(s) \times \vec{n}(s)\} \times \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\{\vec{\omega}(s) \cdot \vec{n}(s)\} \cdot \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Gamma \\ & \left. - \frac{1}{v} \int_{\Gamma} \frac{h \vec{n}(s) \times \vec{r}(\xi, s)}{\{r(\xi, s)\}^2} d\Gamma \right] \dots(2) \end{aligned}$$

ここで、 $\vec{r}(\xi, s)$ は点 s からソース点 ξ に向かう位置ベクトル、 $|r|(\xi, s)$ はその長さ、 n は境界の単位外向き法線である。

J.C. Wu らは式(1), (2)を x - y 座標系に置き換えたうえで離散化方程式を求め解析を行っている。Fig. 1 に示す領域分割について J.C. Wu らの手法をそのまま用いてクエット流を求めた。この速度分布に関しては Fig. 2 に示すように得られており、誤差が 3% 未満で精度が良かった。一方、圧力分布に関し

ては 4 節に示すが、圧力の値が接点ごとに極端なジグザグ変化をし、大きな誤差が現れる。次の章では、本研究で開発した圧力計算法を提示する。

3. 計算法

前節までで述べたが、J.C. Wu らの手法をそのまま用いた場合、圧力の値にジグザグなノイズが見られ有効性に欠ける。この節ではこの現象を解決する圧力計算法を示す。

二次元、非圧縮、定常、層流を仮定し、外力は無くかつ物理量は無次元数で表すものとする、ナビエ・ストークス方程式から圧力微分を表す式は次式のようになる。

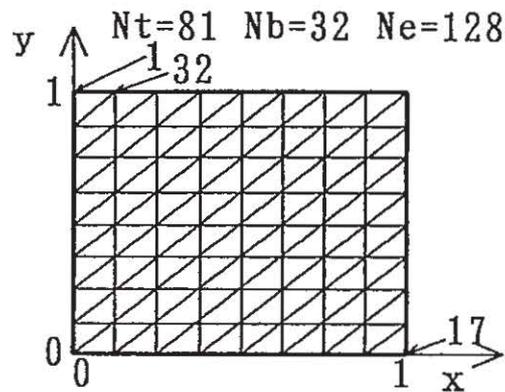


図1 要素分割

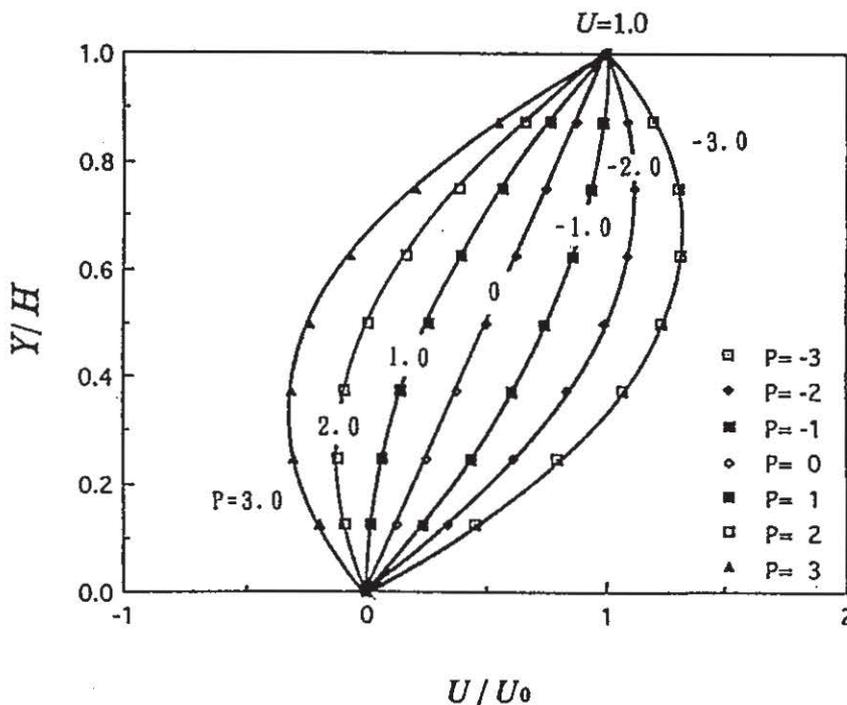


図2 クエット流れの速度分布

$$Re \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Re \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \dots\dots(3)$$

$$Re \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - Re \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \dots\dots(4)$$

ところで、J.C. Wuらの手法では境界節点での圧力を次式によって定義している。

$$h_b = Re \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \quad \dots\dots(5)$$

式(5)の括弧内第2項は境界条件より既知であるため、この式での未知数は p/ρ のみである。ここで境界における静圧は境界節点近傍において直線的に変化するものと考え、式(3)、(4)に示す圧力微分値が求まれば静圧の増分が得られる。圧力微分値を得るには速度微分を得ることが必要である。本研究では、速度微分を得る方法としてテイラー展開の公式を利用した。速度成分 u は境界節点近傍で x, y による関数として表されかつ微分可能であるものとする、境界節点 (x_b, y_b) を中心としたテイラー展開式は次式で表される。

$$\begin{aligned} u(x_n, y_n) &= u(x_b, y_b) \\ &+ (h_n D_x + k_n D_y) u(x_b, y_b) \\ &+ \frac{1}{2!} (h_n D_x + k_n D_y)^2 u(x_b, y_b) \\ &+ \frac{1}{3!} (h_n D_x + k_n D_y)^3 u(x_b, y_b) + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} (h_n D_x + k_n D_y)^n u(x_b, y_b) \\ &+ \dots\dots \end{aligned} \quad \dots\dots(6)$$

$$x_n = x_b + h_n, \quad y_n = y_b + k_n \quad \dots\dots(7)$$

式(6)において $u(x_b, y_b)$ は境界条件より既知である。 $u(x_n, y_n)$ はテイラー展開の中心となっている節点 (x_b, y_b) 以外の節点での x 方向速度成分で、この節点が境界上であれば境界条件、領域内部であれば解析値により与えられる。

これより、式(6)は速度微分を未知数とした方程式と考えることができる。よってこれを連立させて解くことにより微分値を得ることができる。連立方程式の元数は式(6)の n の値により定まる。ここでは簡単のため $n = 2$ の場合を考えると5元連立方程式となる。今、節点 (x_b, y_b) での速度微分を得るものとし、節点 (x_b, y_b) の近傍には節点 (x_{ni}, y_{ni}) ($i = 1 \sim 5$) がある。それぞれに式(6)を適用し、得られる方程式をマトリクス表示すると次式のようなになる。

$$AB = C \quad \dots\dots(8)$$

$$A = \begin{pmatrix} h_{n1} & k_{n1} & h_{n1}^2/2 & h_{n1}k_{n1} & k_{n1}^2/2 \\ h_{n2} & k_{n2} & h_{n2}^2/2 & h_{n2}k_{n2} & k_{n2}^2/2 \\ h_{n3} & k_{n3} & h_{n3}^2/2 & h_{n3}k_{n3} & k_{n3}^2/2 \\ h_{n4} & k_{n4} & h_{n4}^2/2 & h_{n4}k_{n4} & k_{n4}^2/2 \\ h_{n5} & k_{n5} & h_{n5}^2/2 & h_{n5}k_{n5} & k_{n5}^2/2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(9)$$

$$B = (u_x \quad u_y \quad u_{xx} \quad u_{xy} \quad u_{yy})^T \quad \dots\dots(10)$$

$$C = (du_1 \quad du_2 \quad du_3 \quad du_4 \quad du_5)^T \quad \dots\dots(11)$$

$$du_i = u(x_{ni}, y_{ni}) - u(x_b, y_b) \quad \dots\dots(12)$$

同様に、速度成分 v についてもマトリクス表示を得てこれらを解くことで速度微分が得られる。この際、最小二乗法、ガウス・ザイデル法を合わせて用いる。得られた微分値を式(3)、(4)に代入することで圧力微分値が得られ、これにより微小区間内の静圧の増分が得られる。増分を得る方法としては以下に示す全微分の式を用いる。

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad \dots\dots(13)$$

境界節点 n での圧力微分値が支配する領域は Fig. 3 に示すように、隣り合う節点 $n+1, n-1$ 方向に長さ $1_n/2, (1_n-1)/2$ の区間であると考え。圧力算出法としては Fig. 4 に示すように、まず境界節点番号1での静圧を零とし、節点1での圧力微分値を基に a 点の静圧を算出する。次に節点2での圧力微分値より $a \sim b$ 点間の静圧を算出する。この方法を、

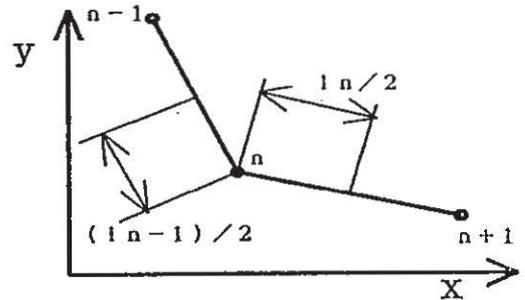


図3 支配域

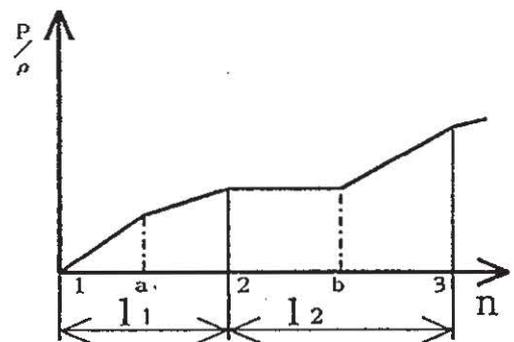


図4 圧力算出

境界全域に適用することにより静圧値を得る。境界を一周し節点1の圧力を求めると誤差により零にはならない筈なので、節点1から境界に沿う長さに応じて補正を行う。最終的には動圧分を足した値が h_b となる。

4. 計算結果

前節で述べた手法の有効性を確認するため、Fig. 1と同じ領域分割で求めたクエット流について、厳

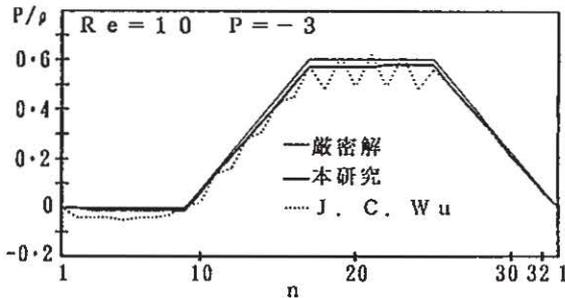


図5 クエット流れの圧力分布

密解, J.C. Wuの手法, 本研究の手法による解を比較したものを Fig.5に示す。又, 本研究の手法をスプール弁内流れの解析に適用した場合の流速分布を Fig. 6に, 圧力分布を Fig. 7に示す。

なお, これらの解析においては $n = 3$ で計算を行った。

5. 結 言

本報告の計算法によって求めた圧力では, J.C. Wuらの解法をそのまま使用した際に生ずるジグザグ誤差が解消されていることが, クエット流れの厳密解およびJ.C. Wuの解との比較から明らかにされた。

最後に, 本研究は秋田大学鉱山学部機械工学科高橋義雄研究室との共同研究の副産物として得られたものである。ここに高橋教授ならびに同研究室に対し感謝の意を表す。

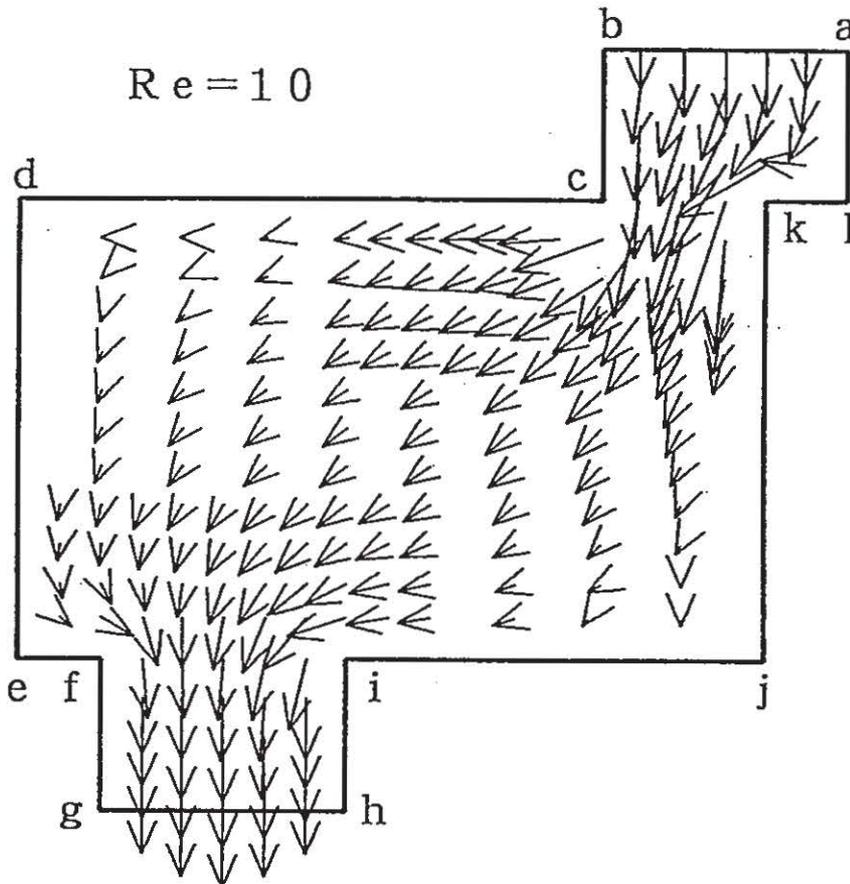


図6 スプール弁内の速度分布

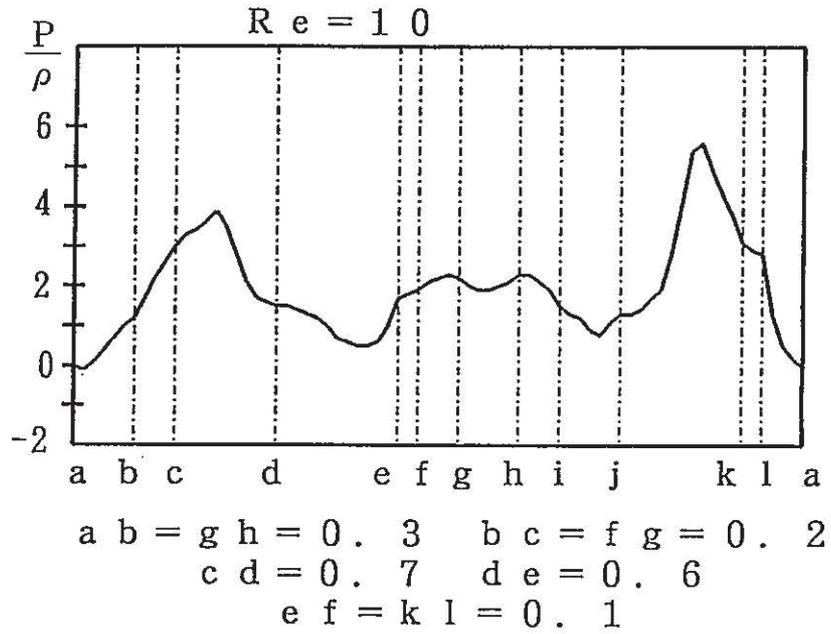
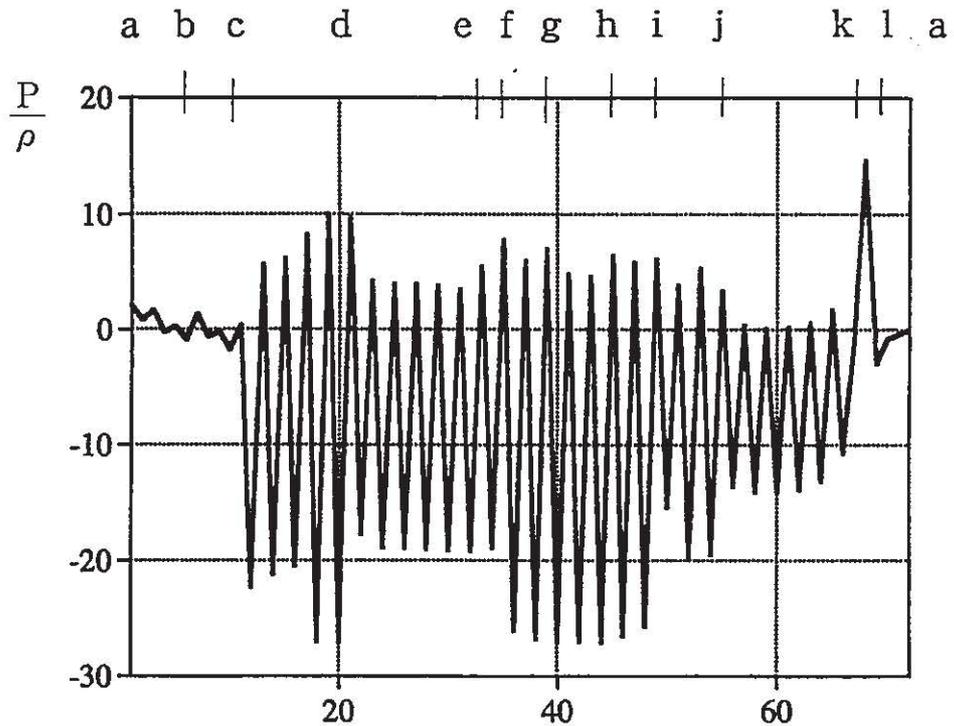


図7 スプール弁の圧力分布

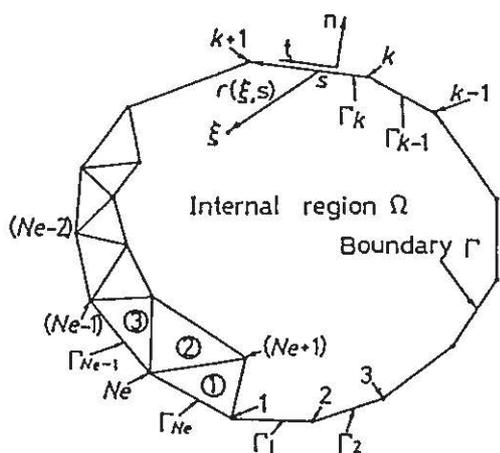
6. 付 録

付図1は本論文の原稿作成後に計算された、 Wu

の方法によるスプール弁境界壁における圧力分布を示したもので、境界壁の形状が複雑なことからクエット流れ以上に極端なジグザグを示しもはや全く実用的価値はない。これに比べ図7に示す本計算



付図1 Wu の結果(スプール弁の圧力分布)



付図2 記号の説明

法では安定した圧力分布を示している。参考のため付図2には Wu の方法の記号の説明を示した。

参考文献

- 1) 高橋・他, 境界要素法を用いた空洞内の流動数値シミュレーション, 第3回, 日本素材物性学会年会講演要旨集, 1993年7月, pp. 39-40.
- 2) 高橋・他, 境界要素法を用いた油圧制御弁内の流動数値シミュレーション, 素材物性学雑誌,

- 第6巻, 第2号, 1993年12月, pp. 65-70.
- 3) 高橋・他, 定常流体軸力におよぼすスプール弁形状の影響, 素材物性学雑誌, 第7巻, 第1号, 1994年9月, pp. 13-20.
- 4) Wu, J.C. and Wahbah, M.M., Numerical Solution of Viscous Flow Equation Using Integral Representations, Lectur Notes in Physics, Springer Verlag, New York, Vol. 59, 1976, pp. 448-453.
- 5) Wu, J.C., Proceedings of the 1974 Conference on Finite Element Methods in Engineering, Sydney 1974, pp. 827-840.
- 6) 郭・中野, 境界要素法によるスプール弁内流れの数値解析 (第1報: $V-\omega-p$ を変数とした境界要素法), 油圧と空気圧, 第20巻, 第6号, 1989年9月, pp. 538-545.
- 7) N. Tosaka, Integral equation formulation with the primitive variables for incompressible viscous fluid flow problems, Computational Mechanics, vol. 4, 1989, pp. 89-103.
- 8) 登坂, 数値流体力学 (保原・大宮司編) 第5章, 東京大学出版会, 1992年1月.