高専数学で有限要素法を扱えないか

吉　村　　　卓

Finite Element Method Can Be Taught in Kosen's Mathematics Curriculumn

Takashi YOSHIMURA

(1993年10月29日受理)

1．はしがき

航空構造力学における微分方程式の数値解法として生み出された有限要素法は，今や土木，建築，造船，機械などの構造工学の分野のみならず，熱伝達，電磁気学，流体力学等の移動現象を解析するための手法としても用いられるようになり，理工学のあらゆる分野において，実用的な数値解法として普及するにいたっている。

このようなとき，秋田高専産学協力会よりの要請により，本年度公開講座で筆者も有限要素法の講義を一部担当することになった。

このように，多くの分野で用いられ，地元産業界からも関心をもたれるようになった現在，専門基礎としての数学のカリキュラムの中で，有限要素法の基礎を，高専数学の全体系をくずさずに扱えないかを考察するのが本稿の目的である。

2．理論の基礎

有限要素法は，微分方程式を差分形式ではなく，変分形式で処理しようとするものである。すなわち，汎関数の最小化（あるいは最大化）を問題とする。というのは，差分法では領域を規則的な網目に分割して計算するため，複雑な形状の境界を持つ領域での扱いが煩雑なのに対し，変分形式では領域を任意の形状の小領域に分割して計算できるため，境界条件の取扱いが容易だからである。

ところで，数学では，集合Xから集合Yへの一意対応の規則fをXからYへの写像という。そして，X，Yともに数の集合のときfを関数といい，X，Yともに関数の集合のときfを作用素あるいは演算子という。また，Xが関数の集合，Yが数の集合のときfを汎関数という。

作用素の例としては，導関数を求めるとか，不定積分を求めるなどの作用素，汎関数の例としては，定積分の値を求めるなど，簡単なものについては，微分積分学でその概念を学んでいる。

記述を簡単にするため以後の議論に現れるp，q，f，uなどの関数は，その連続性や微分可能性は必要なだけ満足しているものとして，いちいち断らずに用いることにする。

そこで，境界条件

$$u(a)=\alpha\ ,\ u(b)=\beta$$

のもとで汎関数

$$J[u]=\int_a^b \{p(x)u'^2+q(x)u^2+2f(x)u\}\,dx$$

の最小化問題を考えよう。

$u(x)$をJを最小にする関数とし，$\eta(x)$を境界で0になる関数とすると

$$J[u(x)+\epsilon\,\eta(x)]\geqq J[u]$$

が成立する。$J[u+\epsilon\eta]$をϵの関数と考えれば，$\epsilon=0$でJは最小値をとるから

$$\left[\frac{d}{d\epsilon}J[u+\epsilon\,\eta]\right]_{\epsilon=0}=0$$

である。これと

《変分学の基本補助定理》

境界条件

$$\eta(a)=\eta(b)=0$$

をみたす$\eta(x)$に対してfが

$$\int_a^b f(x)\,\eta(x)\,dx=0$$

ならば$f(x)\equiv 0$である。

とからオイラーの方程式

$$\frac{d}{dx}(pu')-qu-f=0$$

が導かれる。

逆に，境界値問題

$$Lu\equiv\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=f(x)$$

$$\alpha u(a)-\alpha'u'(a)=0\ ,\ \beta u(b)+\beta'u'(b)=0$$

を考えよう。ここに，α，α'およびβ，β'はそれぞれ同時に0になることはないと仮定する。このとき，

演算子Lはつぎの対称性をもっている。

補題：演算子Lの定義域$D(L)$の任意の要素対u,vに対して

$$(Lu,v)=(u,Lv)$$

が成立する。

一般に線形な演算子Aが任意の$u,v\in D(A)$に対して

$$(Au,v)=(u,Av)$$

を満足しているとき，これを対称な演算子あるいは自己共役演算子という。

また、$p(x),q(x),\alpha,\alpha',\beta,\beta'$は

$$0<p_m\leqq p(x)\leqq p_M$$

$$0<q_m\leqq q(x)\leqq q_M$$

$$\alpha\alpha'\geqq 0,\quad \beta\beta'\geqq 0$$

を満たすものとすると，上の演算子Lはさらに次の性質をもつ。

補題：任意の$u\in D(L)$に対して

$$(Lu,u)\geqq q_m\|u\|^2$$

が成立する。

一般に対称な演算子をAとするとき，任意の関数$u\in D(A)$に対して

$$(Au,u)\geqq r^2\|u\|^2$$

が成立するような正の定数r^2が存在するならば，Aを正定値対称演算子という。

演算子Aが正定値のとき、方程式

$$Au=f$$

の解法はある変分問題の解法に帰着される。すなわち

定理：Aを正定値演算子とする。このとき汎関数

$$J[u]=(Au,u)-2(f,u)$$

を最小にする関数$u\in D(A)$が存在すれば，それは方程式

$$Au=f$$

の解であり，逆に，方程式

$$Au=f$$

の解は汎関数$J[u]$値を最小にする。

先に与えた境界値問題に対する汎関数$J[u]$は次式で与えられる。

$\alpha'\neq 0$，$\beta'\neq 0$のとき

$$\begin{aligned}J[u]&=(Lu,u)-2(f,u)\\&=\int_a^b\{p(x)u'^2(x)+q(x)u^2(x)-2f(x)u(x)\}\,dx\\&\quad+\frac{\alpha}{\alpha'}p(a)u^2(a)+\frac{\beta}{\beta'}p(b)u^2(b)\end{aligned}$$

$\alpha'=\beta'=0$　すなわち　$u(a)=u(b)=0$のときは次のようになる。

$$J[u]=\int_a^b\{pu'^2+qu^2-2fu\}\,dx$$

線形方程式と２次汎関数の問題との関係はA,vおよびfがスカラーの場合きわめて簡単である。すなわち，

$$J(v)=Av^2-2fv$$

は放物線であり，$A>0$ならば，その最小値は

$$\left[\frac{dJ}{dv}\right]_{v=u}=2(Au-f)=0$$

となるuでとられる。　また、vとfがn次元ベクトルで，Aがn次の対称正定値行列のとき

$$\begin{aligned}J[v]&=\sum_{j,k}A_{jk}v_jv_k-2\sum_j f_jv_j\\&=(Av,v)-2(f,v)\end{aligned}$$

であるから、オイラーの方程式は

$$\left[\frac{\partial J}{\partial v_i}\right]_{v=u}=2\left\{\sum_j A_{ij}u_j-f_i\right\}=0$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

すなわち，ベクトル方程式

$$\mathrm{A}\mathrm{u}=f$$

である。幾何学的には，Aが正定値のとき$J[v]$は下に凸の放物面である。

例えば２変数の場合

$$\begin{aligned}y&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\\&=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\quad(a_{12}=a_{21})\end{aligned}$$

は，これを

$$a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2+\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}{a_{11}}x_2^2$$

と書き換えてみれば

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0\ \text{かつ}\ a_{11}>0$$

ならyは極小値をとることがわかる。

一般に２変数の関数

$$z=f(x,y)$$

の極値を求める場合，これを２次曲面

$$f(x,y)+(hDx+kDy)f(x,y)$$
$$+\frac{1}{2}(hDx+kDy)^2f(x,y)$$

で近似し（$f(x,y)$のテーラー展開で２次の項までとったもの），１次の項が

$$f_x(a,b)=0,\ f_y(a,b)=0$$

なる点(a,b)で２次形式

$$(hDx+kDy)^2f(x,y)$$

の行列式が正なるとき

$$f_{xx}(a,b)>0$$

ならば$f(x,y)$は極小値である
と一般化される。

これらのことは，３年までに微分積分学で学んでいる。関数の極値問題のときの独立変数に対応するのが，汎関数の極値問題のとき変関数である。ここの考え方の飛躍さえ乗り越えることができれば，変分問題を理解することは可能であろう。なお，連続問題における正定値自己共役なる概念は，離散問題としての線形代数における正定値対称行列に対応する概念である。

汎関数の最小値を求める変分問題で得られたオイラーの方程式はスツルム・リウビル型の微分方程式である。そこに現れる自己共役な微分作用素はつぎの性質をもっている。

補題：Lを自己共役な微分作用素とするとき，区間$[a,b]$で２回連続微分可能な関数$y(x)$，$z(x)$に対し

$$zL[y]-yL[z]=\frac{d}{dx}[p(zy'-yz')]$$

（ラグランジュの等式）

$$\int_a^b\{zL[y]-yL[z]\}dx=[p(zy'-yz')]_a^b$$

（グリーンの公式）

が成り立つ。

微分方程式

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}]+[q(x)+\lambda r(x)]y=0$$

$$\begin{cases}\alpha y(a)+\alpha' y'(a)=0\\ \beta y(b)+\beta' y'(b)=0\end{cases}$$

をあわせてスツルム・リウビル型固有値問題という。ここに，$p(x)$，$q(x)$は区間$[a,b]$で正とし，α，α'，β，β'は定数で

$$|\alpha|+|\alpha'|\neq 0,\quad |\beta|+|\beta'|\neq 0$$

とする。このとき上の補題を用いて

定理：λ，μを相異なる固有値，$y(x)$，$z(x)$をそれぞれλ，μに属する固有関数とすれば

$$\int_a^b r(x)y(x)z(x)dx=0$$

が成り立つ（このとき，$y(x)$と$z(x)$は$[a,b]$で$r(x)$を重みとして直交するという）。
が示せる。

例えば，ルジャンドルの微分方程式あるいはチェビシェフの微分方程式の解として得られる，ルジャンドルあるいはチェビシェフの直交多項式系はフーリエ解析ならびに数値解析において重要な役割を果たす。

すなわち，周期関数のフーリエ級数展開において基底関数として用いられるのみならず，連続関数を（n次）多項式で最小２乗近似する際の基底関数として用いられる。

なお，与えられた$f(x)$に対し，そのn次の最小２乗近似式はフーリエ級数の第n 部分和Snであり，汎関数

$$J=\int_a^b|S_n(x)-f(x)|^2dx$$

を最小にするものである。

３．アルゴリズム

３．１ リッツ法

変分問題の解uに対する近似解$\hat{u}$を求めるには，基底関数と呼ばれるn個の１次独立な関数

$$\phi_1,\ \cdots,\ \phi_n$$

を選び、ϕ_jの１次結合で表される関数

$$\hat{u}=\sum_{j=1}^{n}u_j\phi_j$$

をつくる。ここに，$u_j(j=1,2,\cdots,n)$は未知パラメータである。$J[\hat{u}]$を最小にするu_jを求めるために，$J[\hat{u}]$をパラメータu_jの関数と考えて，u_jを未知数とする連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial u_i}J[\hat{u}]=\frac{\partial}{\partial u_i}J\left[\sum_{j=1}^{n}u_j\phi_j\right]=0\quad(i=1,\cdots,n)$$

を解いて，近似解$\hat{u}=\sum_j u_j\phi_j$を得る。この方法をリッツ法という。

たとえば、スツルム・リウビル型の微分方程式

$$(p(x)u')'-q(x)u=f(x)$$

を境界条件

$$u(a)=\alpha,\ u'(b)+\beta u(b)=\gamma$$

のもとで解く問題は、汎関数

$$J[u]=\frac{1}{2}\int_a^b\{pu'^2+qu^2+2fu\}dx+\frac{\beta}{2}p(b)u(b)^2-\gamma p(b)u(b)$$

を最小にする$u(x)$を求める変分問題に帰着される。

この変分問題の解$u(x)$を一次結合

$$\hat{u}=\sum_{j=1}^{n}u_j\phi_j$$

で近似する。

基底関数系$\{\phi_j(x)\}_{j=1}^{n}$は条件

$$\phi_j(a)=\delta_{j1},\ \phi_j(b)=\delta_{jn}\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

を満たすと仮定する。一次結合$\sum_j u_j\phi_j$を上の汎関数に代入すれば

$$\hat{u}(a)=\sum_j u_j\phi_j(a)=u_1=\alpha$$

$$\hat{u}(b)=\sum_j u_j\phi_j(b)=u_n$$

に注意して

$$J[u]=\frac{1}{2}\int_a^b\{p(\sum_j u_j\phi'_j)^2+(\sum_j u_j\phi_j)^2+2f\sum_j u_j\phi_j\}dx+\frac{\beta}{2}p(b)u_n^2-\gamma p(b)u_n$$

この$J[u]$を最小にするには

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}=\int_a^b\{p\phi'_i+q\phi i\sum_j u_j\phi j+f\phi i\}dx+\delta in\{\beta p(b)u_n-\gamma p(b)\}=0\quad(i=2,\cdots,n)$$

したがって，u_jについての連立１次方程式

$$Ku=F$$

を得る。ここに，行列$K=(K_{ij}),F=(F_i)$　はそれぞれ

$$K_{ij}=\int_a^b(p\phi'_i\phi'_j+q\phi i\phi j)dx+\delta_{in}\delta_{jn}\beta p(b)$$
$$F_i=-\int_a^b f\phi idx+\delta_{in}\gamma p(b)$$

を成分とするn行n列，n行１列の行列である。

３．２ ガラーキン法

リッツ法は凸汎関数を最小化するという古典的変分問題に対してのみ有効な近似解法である。これに対するオイラーの方程式は自己共役であった。しかし，自己共役でない場合とか，対応する汎関数が正定値でない場合、汎関数$J[u]$の最小化ではなく，停留点を探すということにすれば，問題を一般化することができる。

すなわち、汎関数

$$J[u]=(Au,u)-2(f,u)$$

がuで最小値をとるとすれば、すべてのvとϵに対して、つぎの不等式が成立する

$$J[u]\leqq J[u+\epsilon v]$$
$$=J[u]+2\epsilon\{(Au,v)-(f,v)\}+\epsilon^2(Av,v)$$

ϵは正および負の任意の値をとり得るから，その係数は

$$(Au,v)-(f,v)=0\quad for\ \forall\ v$$

を満たさなければならない。そこで形式的に，方程式

$$(Au,v)=(f,v)\text{すなわち}(Au-f,v)=0$$

を作用素方程式

$$Au=f$$

の弱形式という。この場合、Aの正値性はもちろん、対称性も仮定していない。というのは、最小点ではなく、停留点を問題としているからである。

方程式$Au=f$に対し，その弱形式$(Au-f,v)$は重み付き残差と呼ばれ，特に，uならびにvを表すために用いる基底関数系を同じくする解法をガラーキン法という。

例えば、境界条件

$$u(a)=\alpha,\ u'(b)+\beta u(b)=\gamma$$

のもとで，微分方程式

$$p(x)u''-r(x)u'-q(x)u=f(x)$$

の解$u(x)$をその弱形式

$$\int_a^b(-pu''+ru'+qu+f)vdx+p(b)\{u'(b)+\beta u(b)-\gamma\}v(b)=0$$

を利用して，一次結合

$$\sum_j u_j\phi_j$$

で近似することを考えよう。$u(x)$のかわりに，一次

結合 $\sum_j u_j\phi_j$を上の弱形式に代入し,重み関数として

$$v(x)=\sum_j a_j\phi_j$$

を選ぶ。ただし，$v(x)$は$v(a)=0$を満たすものとする。このとき，上の弱形式が満たされることは

$$\int_a^b\{-pu''+ru'+qu+f\}\phi i dx$$
$$+p(b)\{u'(b)+\beta u(b)-\gamma\}\phi i(b)=0$$

が満たされることと同値である。したがって,ガラーキン法による近似解

$$\sum_j u_j\phi_j$$

の係数$u_j(j=1,2,\cdots,n)$はつぎの連立1次方程式の解である。

$$\mathrm{Ku}=F$$

ここに，行列$K=(K_{ij}),F=(Fi)$はそれぞれ

$$K_{ij}=\int_a^b\{p\phi'_i\phi'_j+(p'+r)\phi_i\phi'_j+q\phi i\phi j\}dx$$
$$+\delta in\delta jn\beta p(b)\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$
$$F_i=-\int_a^b f\phi idx+\delta in\gamma p(b)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

を成分とするn行n列，n行1列の行列である。

3．3　有限要素法

有限要素法で用いられる基底関数系は問題の区間$[a,b]$全体で定義されたものではない。与えられた区間を，有限要素と呼ばれる有限個の小区間に分割し，その各有限要素ごとに，次数の低い簡単な多項式によって表される基底関数系が用いられる。区間と区間の境界点（節点と呼ばれる）で，ある程度の連続性が必要となるので，最も簡単なものは1次要素，すなわち，各小区間で1次式，節点で連続な関数である（屋根型関数と呼ばれる)。

$$\phi_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & (x_{j-1}\leqq x\leqq x_j)\\ \dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & (x_j\leqq x\leqq x_{j+1})\\ 0 & (x<x_{j-1},\ x_{j+1}<x)\end{cases}$$

屋根型関数$\phi j(x)\ (j=1,2,\cdots,n)$は$2h(h=\frac{b-a}{2})$の長さの区間以外では0となるので，局所基底である。ϕj_{-1}とϕj_{+1}は，一方が0でない区間では他方が0となるので，それらは互いに直交している。すなわち，基底関数系は一次独立性が高いので，微分方程式の近似解$\sum_j u_j\phi_j$のパラメータu_jを与える連立1次方程式は数値的安定性をもつ。

ところで，有限要素という概念は，微分方程式を変分形式で考えるときに始めて現れたものではない。定積分の値の近似値を数値的に求めるとき，積分区間$[a,b]$を小区間に分割し，各小区間でなるべく低い次数の多項式で,被積分関数を近似する。このとき,分割された小区間のそれぞれが有限要素と呼ばれるものに他ならない。すなわち,有限要素という考えは,微分積分学ですでにおなじみの概念なのである。

なお，数値積分公式そのものはK_{ij}ならびにF_iに現れる積分項

$$\int_a^b p\phi'_i\phi'_j dx\quad\int_a^b q\phi_i\phi_j dx\quad\int_a^b f\phi_i dx$$

などの計算に必要である。

変分問題の近似解を計算するするための連立1次方程式に現れる係数行列は，1次要素の場合，3重対角という規則的な形をもっている。このような連立方程式を解くには，ガウスの消去法のような直接法を適用するより，ガウス・ザイデル法のような反復解法を用いる方が望ましい。

正定値自己共役な汎関数を最小化する変分問題に対するリッツ法では，連立方程式の係数行列は正定値対称行列となるので，ガウス・ザイデル法は収束する。また，ガラーキン法に現れる係数行列は対称性は失われるが，対角優位となる場合が多いので，同じくガウス・ザイデル法は収束する。

消去法に比べ，反復法のプログラムは分かりやすいので，有限要素法では反復法がよく用いられる。

4．取扱い上の留意点

4．1

数学のカリキュラムの中で有限要素法を扱うとして，それは単なる Know How の指導で終わってはならない。高専は実践的技術者の育成を目的に掲げた教育機関であるが，高等教育の一環である以上，Know Why をも目指した指導がなされる必要がある。

数値積分公式にしろ，連立1次方程式の解法にしろ，それらは単にアルゴリズムとしての公式を示すのみに終わるべきではない。数学の中での学習であるからには，なぜ，ガウス・ザイデル法は収束するのであろうか，その理由を考えさせる必要がある。上で Know Why を目指すと言ったのは，例えばこうした事柄を意味するのである。

さて，連立方程式$A\mathrm{x}=\mathrm{b}$に対し，係数行列を

$$A=M-N$$

と分解し，方程式を

$$x = Hx + M^{-1}b \quad (ここに H = M^{-1}N)$$

と変形してみると，第k近似解x^kの誤差e^kは関係式

$$e^k = He^{k-1}$$

を満たす。したがって，反復法が収束するためには

$$\lim_{k \to \infty} e^k = 0$$

が成立することが必要十分であるが，そのためには無限等比数列

$$a_k = ra_{k-1}$$

が極限値０に収束するための条件としての

$$|r| < 1$$

と対比して

$$\|H\| < 1 \text{すなわち} \rho(H) < 1$$

ならばよい

ということを理解させるのは，さほど困難なことではないであろう。この際、厳密な証明は不要である。論証にこだわるよりは，類比あるいは類推により，命題の内部構造を理解させることに努力を傾けるべきである。類推の論理は形式論理ではなく，発見促進的な原理として，創造性の開発にとって強力なものである。

ところで，個々の問題に対し$\rho(H)$すなわち，反復行列Hの固有値を計算することは，連立方程式の解を計算すること以上に難しいので，連立方程式の係数行列の形をみて，反復法の収束性を判定するのが普通である。上に述べた対角優位あるいは正定値対称というのはその代表的な例である。

4．2

2．で正定値対称演算子について，また，3．2でガラーキン法について述べた際，関数空間における内積やノルムの記法を用いたが，これらは，線形代数におけるベクトルの内積やノルム概念を抽象化したものである。

すなわち，ベクトルのノルムとは抽象ベクトル空間Xにおいて

$N1$：$\forall x \in X$に対して$\|x\| \geq 0$，
$\|x\| = 0 \rightleftarrows x = 0$

$N2$：$\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathrm{R}$に対して
$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

$N3$：$\forall x,y \in X$に対して
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

なる性質を満足するものであり，ユークリッド空間におけるベクトルの長さに相当する。

また，ベクトルの内積とは，実ベクトル空間Xの任意の要素対x,yに対して，１つの実数(x,y)が対応し，それが

$S1$：$(x,x) \geq 0$，$(x,x) = 0 \rightleftarrows x = 0$
$S2$：$(x,y) = (y,x)$
$S3$：$\forall \lambda, \mu \in R$に対し
$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$

なる規則を満たすものである。幾何ベクトルについての性質を抽象化したものとして、容易に理解できるであろう。なお、ベクトルxのノルムを

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

により定義すると、明らかに、これは上のノルムの公理を満たす。

逆に、これらの概念を、区間$[a,b]$で連続な関数f,gの内積やノルムに具体化すると、

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$
$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

のように定義され、ベクトルの場合の和が積分に代わっただけで、上の諸公理が満足されることは容易に理解できよう。そして、関数f,gの直交性を、それらの内積が０なることで定義するのは、ベクトルの場合と同様である。そして、直交関数系を基底としたフーリエ級数展開が、平面上あるいは空間内のベクトルの、直交する単位ベクトルの１次結合による表現と形式の上で同じであることを、しっかりと理解させることが重要である。

また、必ずしも直交系ではないが、１次独立な系の１次結合による表現については、３年の応用解析Ⅰ（微分方程式）において、線形微分方程式の一般解が基本解の１次結合で表されることを学んでいるが、このことは、ベクトルの斜交座標系による表現と形式的に同じであることをしっかりと理解させたい。なお、フーリエ展開において直交系が用いられる理由は、べき関数x^j($j=0,1,2,\cdots$)による最小２乗近似が、数値的に不安定であることを知れば頷けるであろう。

上に述べた程度の抽象化はフーリエ解析を学ぶのにも不可欠である。抽象化により、ユークリッド幾

何との対応で、フーリエ級数におけるベッセルの不等式やパーセバルの等式のもつ意味がよくわかるのである。

4．3

有限要素法は、微分方程式を解くための1つの技法である。技法であるからには、その学習は単に理論の紹介に終わってはならない。具体的な問題に対し、プログラムを走らせて、実際に解かせる作業を学生に課すことが必要である。1次元の問題に対しては､そのプログラムはさほど難しいものではない。プログラムの作成まで学生にやらせるかどうかは別として、その内容を理解させ、問題を解くために必要なデータを、どのように用意すればよいか、具体的にその Know How を指導することが大切である。計算機実習を通してはじめて、理論のより深い理解が可能となる。

4．4

2.および3.においては、1次元の場合のみ述べてきたが、できればせめて、2次元の楕円型境界値問題の代表例としての、ラプラス方程式には触れたいものである。というのは、そもそも有限要素法が、任意形状の境界をもった領域における問題を処理する手法として開発されたものだからである。しかし、時間の都合により、1次元の問題で終わらなければならないとしても、そこでは、将来2次元あるいは3次元の問題への発展の可能性を内包した形で取り扱われることが大切である。2.で一般的に正定値対称演算子に、そして、3．2 で線形作用素方程式の弱形式に触れたのも、この故である。

なお、拡散方程式や波動方程式などの初期値境界値問題に対しては､離散化は2段階に分けて考える。すなわち、まず空間変数に対して有限要素法による離散化を行い、次いで時間変数に対し差分法による離散化を行う。これによって、1次元の熱方程式や波動方程式は容易にその近似解を得ることができることを付記しておく。

4．5

先に4．1 で、類推の論理は創造性の開発にとって大切であると言ったが、創造とは異なった素材の新しい組み合わせによって、従来とは違ったものを創り出すことである。素材のないところに創造はあり得ない。また、類比や類推には目前の事象と比較されるべき記憶された先行経験がなくてはならない。先行経験の記憶なしでは学習は成り立たない。2．での考察からもその必要性がわかるように、線形代数と微分積分で学ぶ内容は、それを学生にしっかりと定着させたい。

その際､記憶を定着させる手段として､コンピュータのグラフィックス機能を大いに活用したい。例えば、2変数の関数の極値問題を考えるとき、そのグラフをディスプレイ上に表示させるとともに、(局所) 2次形式の行列式の値を求めて、正定値性とグラフの形状との関連をしっかりと理解させたいものである。

5．あとがき

これまでの考察により、秋田高専におけるカリキュラムのもとで、1年の基礎数学、2年の線形代数、2、3年の微分積分、3年の応用解析I（微分方程式)、4年の応用解析IIIのフーリエ解析を履修後なら、高専数学の中で有限要素法の学習は十分可能であると考えられる。ちなみに、卒業研究では有限要素法を取り扱った経験が現にある。

ところで､これではあまりにも過密スケジュール、時間不足で､学生は消化不良を起こしてしまうとの、反論が出るかもしれない。しかし、はたしてそうであろうか。筆者が今の中学生の年代の頃、筆算で開平計算を行っていたが、電卓の普及した現今、筆算でこれを行うことなど、どこでも教えていない。また、つい最近まで対数計算を教えていたが、これも現在では、対数関数の性質を理解させる程度にとどまり、対数計算に習熟させる目的で、反復練習をさせる授業が行われているとは思われない。また、結果が逆三角関数となる無理式の積分など基礎的な問題は別として、複雑な無理式の積分の計算練習を多くやらせる必要があるであろうか。数式処理のソフトウエアがパソコン上でも利用できる時代である。

時の経過と技術の推移に伴い、必要とされる数学の知識も変化する。その時代に本当に必要なものは何か、そしてそれは基礎教育の中で指導可能か、また、可能だとして、それを学生に効果的に学習させるには、どのような方法が望ましいかについて、常に検討を加える必要がある。指導内容の精選と指導方法の日々の工夫こそ､我々に課せれた仕事である。場合によっては、不急不要の事柄は捨て去る勇気が必要である。