

平行壁間にまたがる通気翼の特性

伊藤 惇・岩城 秀文*

Characteristics of Base-Vented Foil Spanning Parallel Plane Walls

Jun ITO・Hidefumi IWAKI

(1993年10月29日受理)

Characteristics for the base-vented foil in spanwise shear flow between two parallel plane walls are clarified.

An equation of motion with respect to disturbance pressure is transformed into two problems by separation of variables. One of them is that of the spanwise direction and the other is that of the wing sectional plane. For the former, an existing analytical solution is adopted, and the latter is reduced to a integral equation with respect to singularity distribution and solved by a mode function method. These two kinds of solutions corresponding to the individual eigenvalues are combined linearly, and the effects of shear parameter, aspect ratio and cavity length on the wing and cavity characteristics for the base-vented foil in spanwise shear flow between two parallel plane walls are obtained.

1. はじめに

平行壁間のせん断流中の翼の理論は、軸流型の流体機械における静翼や動翼の流体力特性や流動特性を解析したり、これらの翼の設計に資料を提供する上で特に重要である。また、液体を作動流体とするターボ機械の中で高速回転するものでは必然的に静翼や動翼に空洞現象を伴なう。そしてこの空洞現象を制御する方法にベースベンテッドフォイルを採用し、後流に通気する方法がある。

本研究は、主流の速度分布が翼幅方向に変化する平行壁間のせん断流中のベースベンテッドフォイル（通気翼）を扱ったもので、既存の研究「ベースベンテッドフォイルの解法とその特性⁽¹⁾」を「せん断流中における三次元薄翼の一解法^(2, 3)」に応用して、揚力係数分布、全揚力、誘導抗力、圧力係数分布、キャピテーション数分布などに及ぼすアスペクト比、空洞長さおよび主流の速度分布の影響等を明らかにする。

2. 基礎式

2・1 運動方程式と境界条件

図1に示すように弦長cなる通気翼が主流に平行

* 日立製作所

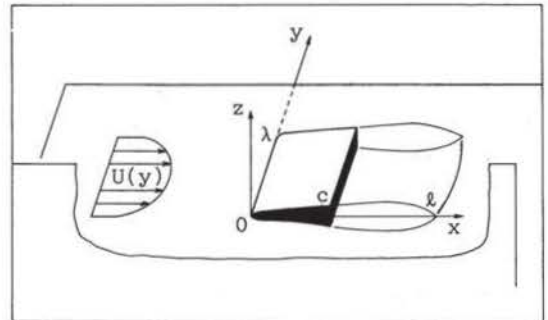


図1 流れの座標系

に位置している。空洞は翼後縁より発生し、後端のx座標をlとする。また流れは非圧縮性、非粘性を仮定する。オイラーの運動方程式と連続の式から微小じょう乱の仮定の範囲でじょう乱圧力pに関して次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + U^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

境界条件としては、

(I)無限遠ではじょう乱圧力pは零であることから、
$$p = 0 ; z^2 + x^2 = \infty \quad (2)$$

(II)平行壁では壁面に垂直な圧力勾配は零であることから、

平行壁間にまたがる通気翼の特性

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; y = 0, \lambda \quad (3)$$

(III)翼面上では線形化した接線流れの条件から、

$$\frac{w(x,y)}{U(y)} = \frac{d}{dz} Z_c(x); 0 < x < c \quad (4)$$

ここで Z_c は反り分布であり、 w はじょう乱速度の z 成分である。

(IV)空洞部分では圧力一定条件より、

$$P(x,y,0) = \text{const.}; c < x < \ell \quad (5)$$

式(3)において次のような変数分離を仮定すると、

$$\frac{P}{\rho} = Y(y) P(x,y) \quad (6)$$

一般解は次のようになる。

$$\frac{P}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) P(x,z; kn) \quad (7)$$

ここで kn は分離定数で、 $Y(y; kn)$ 、 $P(x, z; kn)$ はそれぞれ翼幅方向と翼断面平面の基本解であり、 $F(kn)$ は $Y(y; kn)$ と $P(x, z; kn)$ の線形結合のスペクトルである。したがって式(1)は翼幅方向と翼断面平面とに分かれ、それぞれについて次のような微分方程式が成立する。翼幅方向方程式は次式で表される。

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{U^2} \frac{dY}{dy} \right) - kn^2 \frac{Y}{U^2} = 0 \quad (8)$$

翼断面平面方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - kn^2 P = 0 \quad (9)$$

式(8)で x, z 平面の極座標で再度変数分離を行い、式(2)の境界条件を使って基本解を求めると次式のようになる。

$$P(x,z;kn) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \sum_1(\xi; kn) \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_c^\ell \sum_2(\xi; kn) \times \frac{\partial}{\partial x} K_0(r) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; kn) \frac{\partial}{\partial z} K_0(r) d\xi \quad (10)$$

ここで $r = kn\{z^2 + (x-\xi)^2\}^{\frac{1}{2}}$ である。 Γ は翼上下の速度差に関する特異点分布で、 Σ_1, Σ_2 は翼と空洞からなる空間の翼後縁を境とした前後の厚みに関する特異点分布である。また K_0 は0次の第2種変形ベッセル関数である。

2・2 翼断面平面の基礎式

運動方程式の z 成分から次式が成立する。

$$\frac{\partial}{\partial z} p(x,y,z) = -\rho U(y) \frac{\partial}{\partial x} w(x,y,z) \quad (11)$$

第 n 番目の固有値 kn に対応する無次元じょう乱速度

w_n を次式で定義する。

$$w(x,y,z) = \frac{1}{U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) w_n(x,z; kn) \quad (12)$$

式(7)(11)(12)から

$$w_n(x,z; kn) = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial z} p(x,z; kn) dx \quad (13)$$

式(10)(13)より与えられる P, w_n に、 $0 < x < c, c < x < \ell$ のそれぞれの区間に対してサフィックス1, 2をつけ計算すると、 $0 < x < c$ の範囲に対して

$$P_1(x, \pm 0; kn) = \mp \frac{1}{2} \Gamma(x; kn) - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \sum_1(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{2\pi} \int_c^\ell \sum_2(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} - \Delta u_n(x; kn) \quad (14)$$

$$w_{n1}(x, \pm 0; kn) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} \pm \frac{1}{2} \sum_1(x; kn) + \Delta w_n(x; kn) \quad (15)$$

$c < x < \ell$ の範囲に対しては、

$$P_2(x, 0; kn) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \sum_1(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{2\pi} \int_c^\ell \sum_2(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} - \Delta u_n(x; kn) \quad (16)$$

$$w_{n2}(x, \pm 0; kn) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} \pm \frac{1}{2} \sum_2(x; kn) + \Delta w_n(x; kn) \quad (17)$$

ここで $\Delta u_n, \Delta w_n, \Sigma_1$ は、

$$\Delta w_n(x; kn) = -\frac{1}{4} kn \int_0^c \Gamma(x; kn) dx - \frac{1}{2\pi} kn \int_0^c \Gamma(\xi; kn) \times \text{sgn}(x-\xi) |R_1(kn|x-\xi|) + \int_0^{kn|x-\xi|} K_0(t) dt| d\xi \quad (18)$$

$$\Delta u_n(x; kn) = \frac{1}{2\pi} kn \int_0^c \sum_1(\xi; kn) \text{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) d\xi + \frac{1}{2\pi} kn \int_c^\ell \sum_2(\xi; kn) \text{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) d\xi \quad (19)$$

$$\sum_1 = \frac{dz_c}{dx} \quad (20)$$

また R_1 は、

$$R_1(z) = K_1(z) - \frac{1}{2} \quad (21)$$

であり、 K_1 は1次の第2種変形ベッセル関数である。式(4)に式(12)を代入することにより次式が得られる。

$$\frac{d}{dx} z_c(x) = \frac{1}{U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) w_n(x, -0; kn) \quad (22)$$

式(22)において次式のようにおく。

$$\frac{d}{dx} z_c(x) = w_n(x, -0; kn) \quad (23)$$

式(5)に式(7)を代入することにより次式が得られる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) P(x, 0; kn) = \text{const.} \quad (24)$$

$c < x < \ell$ の範囲に対して、式(24)で以下のおく

$$P(x, 0; kn) = -\frac{1}{2} \sigma_n(kn) \quad (25)$$

以上のことから次式が得られる。

$0 < x < c$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{dz_c}{dx} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^c \Gamma(\xi; kn) \text{sgn}(x-\xi) \\ & \times |R_1(kn|x-\xi|) + \int_0^{kn|x-\xi|} K_0(t) dt| d\xi - \frac{1}{4kn} \int_0^c \Gamma(x; kn) dx \end{aligned} \quad (26)$$

$c < x < \ell$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_n(kn) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^c \sum_1(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{2\pi} \\ & \times \int_0^\ell \sum_2(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} + \Delta u_n(x; kn) \end{aligned} \quad (27)$$

以上の式(26)(27)を解くことにより翼断面平面の解 $P(x, z)$ が求められる。

2・3 翼幅方向の解とスペクトル

式(7)における関数 $Y(y; kn)$ および $F(kn)$ の概要を述べる。図2に示すように主流の速度分布が平行壁間の境界層流れに近い次式で与えられるものとする。

$$U(y) = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{y_e} y \quad (0 < y < y_e) \quad (28)$$

$$U(y) = U_1 = \text{const.} \quad (y_e < y < \frac{1}{2} \lambda) \quad (29)$$

式(8)の翼幅方向方程式を解くことにより $Y(y; kn)$ が次式のように決定される。

$$Y(y; kn) = \frac{1}{D_0} \{ U(y) \cos(kny) - \frac{U_1 - U_0}{kny_e} \sin(kny) \} \quad (0 < y < y_e) \quad (30)$$

$$Y(y; kn) = \frac{1}{D_1} U_1 \cos \{ kn(\frac{1}{2} \lambda - y) \} \quad (y_e < y < \frac{1}{2} \lambda) \quad (31)$$

式(23)から次式が成立する。

$$1 = \frac{1}{U(y) z} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) \quad (32)$$

よって式(32)および規格化の条件

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{Y_2}{U_2} dy = 1 \quad (33)$$

を用いると次の関係式が得られる。

$$F(kn) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda Y(y; kn) dy \quad (34)$$

式(34)に式(30)(31)を代入して積分するとスペクトル $F(kn)$ は、

$$\frac{F(kn)}{U_1} = -\frac{2}{D_0} \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{kn^* \eta_e} \{ 1 - \cos(kn^* \eta_e) \} \quad (35)$$

ここで $\eta_e = 2y_e/\lambda$, $kn^* = kn\lambda/2$ である。 $y = y_e$ で Y が、 $y = \lambda/2$ で dY/dy が連続であることから固有値 kn^* と定数 D_0 と D_1 の比は次の2つの式から得られる。

$$\sin kn^* = \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{kn^* \eta_e} \sin(kn^* \eta_e) \sin \{ kn^*(1 - \eta_e) \} \quad (36)$$

$$\frac{D_0}{D_1} = \cos kn^* - \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{kn^* \eta_e} \sin(kn^* \eta_e) \cos \{ kn^*(1 - \eta_e) \} \quad (37)$$

式(33)より D_0 は

$$\begin{aligned} 2D_0^2 = & \eta_e + \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 (1 - \eta_e) - \frac{1}{2kn^*} [\sin(2kn^* \eta_e) + \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 \\ & \times \sin \{ 2kn^*(1 - \eta_e) \}] - \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{kn^* \eta_e} \{ 1 - \cos(2kn^* \eta_e) \} \end{aligned} \quad (38)$$

から決定される。

2・4 モデルの式と吹き出しの接続の条件式

モデルの式は次のように表される。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\ell}{c} - 1\right) \{ 2C_{-1}(kn) + \pi C_0(kn) + \frac{1}{2} \pi C_1(kn) \} \\ & = -2B_{-1}(kn) - \pi B_0(kn) - \frac{1}{2} \pi B_1(kn) \end{aligned} \quad (39)$$

ただし自由流線が空洞後端よりなめらかに流れ去ることから

$$C_{-1}(kn) = B_{-1}(kn) \quad (40)$$

を満足しなければならない。

3. 解法

3・1 級数展開

積分方程式(26)(27)を解くためには、級数解法によるが、 Γ , Σ_1 , Σ_2 は次のように級数展開される。

$$\begin{aligned} \Gamma(x; kn) = & A_0(kn) \cot \frac{\phi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_m(kn) \sin m \phi, \\ & x = \frac{c}{2} (1 - \cos \phi) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \sum_1(x; kn) = & B_{-1}(kn) + B_0(kn) \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_m(kn) \sin m \theta, \\ & x = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\sum_2(x; kn) = C_{-1}(kn) + C_0(kn) \tan \frac{\tau}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m(kn) \sin m \tau,$$

平行壁間にまたがる通気翼の特性

$$x = c + \frac{\ell - c}{2}(1 - \cos \tau) \quad (43)$$

これらの級数の係数を求めることによって翼特性が求められる。

3・2 翼

式(26)に式(41)を代入し、さらに

$$x - \xi = \frac{c}{2}(\cos \psi - \cos \phi) \quad (44)$$

$$d\xi = \frac{c}{2} \sin \psi d\psi \quad (45)$$

を代入し整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dZc}{dx} = & A_0(kn) \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \pi kn c\right) \frac{1}{4\pi} ckn \int_0^\pi \operatorname{sgn} \left| \frac{c}{2} (\cos \psi - \cos \phi) \right| \right. \\ & \times [R_1 |kn| \frac{c}{2} (\cos \psi - \cos \phi)| + \int_0^{kn|c/2(\cos \psi - \cos \phi)|} K_0(t) dt] \\ & \times \cot \psi 2 \sin \psi d\psi \left. \right] + A_1(kn) \left[\frac{1}{2} (\cos \phi - \frac{1}{8} \pi kn c) - \frac{1}{4\pi} ckn \right. \\ & \times \int_0^\pi \operatorname{sgn} \left| \frac{c}{2} (\cos \psi - \cos \phi) \right| [R_1 |kn| \frac{c}{2} (\cos \psi - \cos \phi)| + \\ & \left. + \int_0^{kn|c/2(\cos \psi - \cos \phi)|} K_0(t) dt] \sin \psi \sin \psi d\psi \right] \\ & + A_2(kn) \left[-\frac{1}{4\pi} ckn \int_0^\pi \operatorname{sgn} \left| \frac{c}{2} (\cos \psi - \cos \phi) \right| \right. \\ & \times [R_1 |kn| \frac{c}{2} (\cos \psi - \cos \phi)| + \int_0^{kn|c/2(\cos \psi - \cos \phi)|} K_0(t) dt] \\ & \left. \times \sin 2\psi \sin \psi d\psi \right] \quad (46) \end{aligned}$$

上式に既存の研究⁽¹⁾より得られた値

$$\frac{dz_c}{dx} = (0.03510, -0.01073, -0.07748) \quad (47)$$

をそれぞれ代入して解くことにより A_0, A_1, A_2 が求められる。ここで標点位置は弦長方向であるので Schlichting の方法⁽⁴⁾を採用した。すなわち

$$x_\nu = \frac{c}{4N}(4\nu - 1), \quad (\nu = 1, 2, 3) \quad (48)$$

上式で N は選点数であり $N = 3$ とした。

3・3 空洞

式(27)を変形し次式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_n(kn) = & \frac{1}{\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{\pi} \int_c^\ell \Sigma_2(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} \\ & + 2\Delta u_n(x; kn) \quad (49) \end{aligned}$$

上式において右辺第 1 項は次のようになる。

$$\frac{1}{\pi} \int_0^c \Sigma_1(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{2}{\pi} [B - 1 \log \left| \frac{D+1}{D-1} \right| + B_0 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}}]$$

$$\times (1 - D + \sqrt{D^2-1}) + \frac{1}{2} B_1 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} |1 - (D + \sqrt{D^2-1}) 2|, D = \frac{2X}{c} - 1 \quad (50)$$

また第 2, 3 項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_c^\ell \Sigma_2(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} + 2\Delta u_n(x; kn) \\ = & C_{-1} \left[\frac{2}{\pi} \log \left| \frac{E+1}{E-1} \right| + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\xi} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right. \\ & \left. + \int_{\tau+\xi}^\pi \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right] \\ & + C_0 \left[\frac{2}{\sqrt{1-E^2}} \sin(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{-E}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\xi} \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \right. \\ & \left. \times \sin \tau' d\tau' + \int_{\tau+\xi}^\pi \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right] \\ & + C_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \sin(2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{-E}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\xi} \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \right. \\ & \left. \times \sin \tau' d\tau' + \int_{\tau+\xi}^\pi \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right] \\ & + C_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \left| \sin(3 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{-E}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{-E}) \right| + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\xi} \sin 2\tau' \right. \\ & \left. \times \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right. \\ & \left. + \int_{\tau+\xi}^\pi \sin 2\tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \right. \\ & \left. \times \sin \tau' d\tau' \right], E = \frac{2(x-c)}{\ell-c} - 1 \quad (51) \end{aligned}$$

標点位置 X_1, X_2, X_3 ($X_N = c + 1/6(1-c)(2N-1)$) における式はそれぞれ次のようになる。

$$\sigma_m(kn) (-1)$$

$$\begin{aligned} & + C_{-1}(kn) \left[\frac{1}{\pi} \log \left| \frac{E+1}{E-1} \right| + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\xi} \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\ & \left. \times R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right. \\ & \left. + \int_{\tau+\xi}^\pi \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right] \\ & + C_0(kn) \left[\frac{2}{\sqrt{1-E^2}} \sin(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{-E}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\xi} \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\ & \left. \times R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right. \\ & \left. + \int_{\tau+\xi}^\pi \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn|x-\xi|) \sin \tau' d\tau' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +C_1(kn) \left[\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \sin(2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\epsilon} \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\
 & \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \\
 & \quad \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right] \\
 & +C_2(kn) \left[\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \left| \sin(3 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) \right| + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \right. \\
 & \times \int_0^{\tau-\epsilon} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \\
 & \quad \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau'] \\
 & = -\frac{2}{\pi} [B_{-1} \log | \frac{D+1}{D-1} | + B_0 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} (1-D+\sqrt{D^2-1}) \\
 & \quad + \frac{1}{2} B_1 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} \{1 - (-D+\sqrt{D^2-1})^2\}] \\
 & - \frac{1}{2\pi} ckn \int_0^{\pi} (B_{-1} + B_0 \cot \frac{\theta'}{2} + B_1 \sin \theta') \\
 & \quad \times \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \theta' d\theta' \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sigma_n(kn) (-1) \\
 & +C_{-1}(kn) \left[\frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\epsilon} \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\
 & \quad \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \operatorname{sgn}(x-\xi) \\
 & \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau'] \\
 & +C_0(kn) \left[-2 + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\epsilon} \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\
 & \quad \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \\
 & \quad \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right] \\
 & +C_1(kn) \left[\frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\epsilon} \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\
 & \quad \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \\
 & \quad \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right] \\
 & +C_2(kn) \left[2 + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) \right. \\
 & \quad \times kn \int_0^{\tau-\epsilon} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right] \\
 & = -\frac{2}{\pi} [B_{-1} \log | \frac{D+1}{D-1} | + B_0 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} (1-D+\sqrt{D^2-1}) \\
 & \quad + \frac{1}{2} B_1 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} \{1 - (-D+\sqrt{D^2-1})^2\}] \\
 & - \frac{1}{2\pi} ckn \int_0^{\pi} (B_{-1} + B_0 \cot \frac{\theta'}{2} + B_1 \sin \theta') \\
 & \quad \times \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \theta' d\theta' \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sigma_n(kn) (-1) \\
 & +C_{-1}(kn) \left[-\frac{2}{\pi} \log | \frac{E+1}{E-1} | + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \int_0^{\tau-\epsilon} \operatorname{sgn} \right. \\
 & \quad \left. (x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right] \\
 & +C_0(kn) \left[-\frac{2}{\sqrt{1-E^2}} \sin(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \right. \\
 & \quad \times \int_0^{\tau-\epsilon} \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) \\
 & \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \tan \frac{\tau'}{2} \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1 \\
 & \quad \left. (kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +C_1(kn) \left[-\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \sin(2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) \right. \\
 & \quad \times kn \int_0^{\tau-\epsilon} \sin \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) \\
 & \times R_1(kn | x-\xi |) \tau' d\tau' + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) \\
 & \quad \left. \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \right] \\
 & +C_2(kn) \left[-\frac{1}{\sqrt{1-E^2}} \left| \sin(3 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sin(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-E^2}}{E}) \right| + \frac{1}{2\pi} (\ell - c) kn \right. \\
 & \times \int_0^{\tau-\epsilon} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau' \\
 & \quad \left. + \int_{\tau+\epsilon}^{\pi} \sin 2 \tau' \operatorname{sgn}(x-\xi) \right. \\
 & \times R_1(kn | x-\xi |) \sin \tau' d\tau'] = -\frac{2}{\pi} [B_{-1} \log | \frac{D+1}{D-1} | \\
 & \quad + B_0 \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} (1-D+\sqrt{D^2-1}) \\
 & \quad + \frac{B_1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{D^2-1}} \{1 - (-D+\sqrt{D^2-1})^2\}]
 \end{aligned}$$

平行壁間にまたがる通気翼の特性

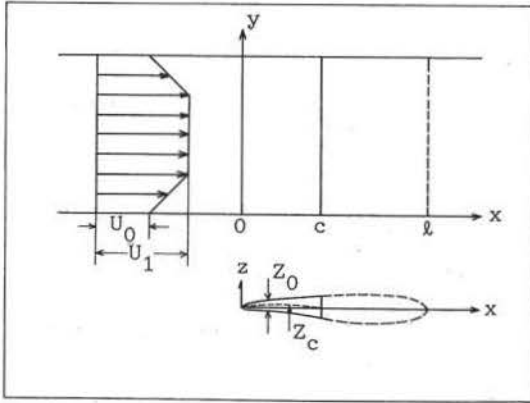


図2 数値計算例

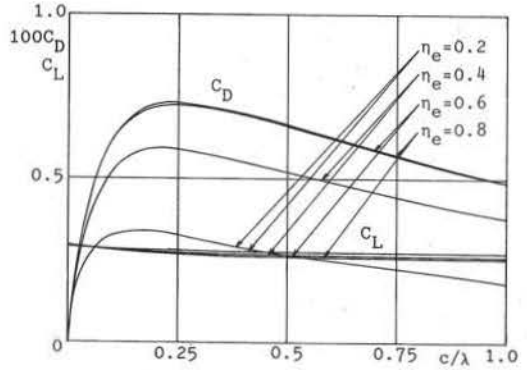


図5 全揚力係数と誘導抗力係数

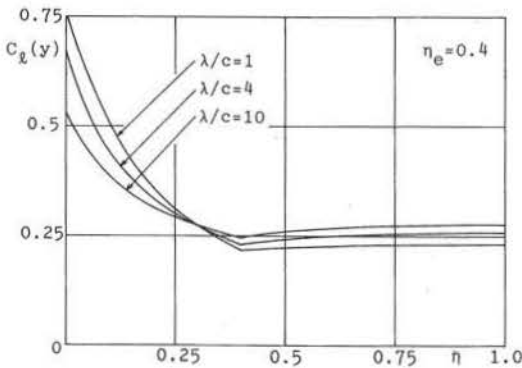


図3 揚力分布 (アスペクト比の影響)

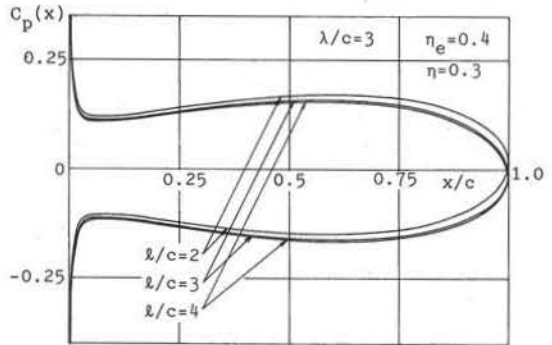


図6 圧力分布 (空洞長さの影響)

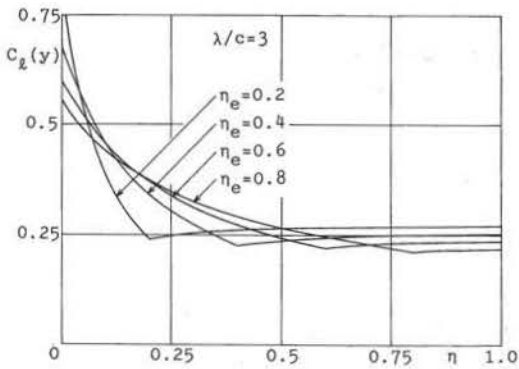


図4 揚力分布 (主流速度分布の影響)

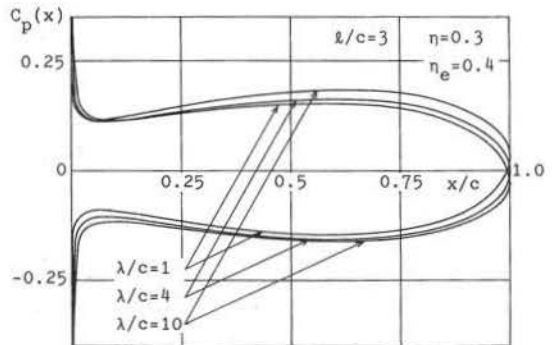


図7 圧力分布 (アスペクト比の影響)

$$-\frac{1}{2\pi} ckn \int_0^\pi (B_{-1} + B_0 \cot \frac{\theta'}{2} + B_1 \sin \theta')$$

$$X \text{sgn}(x - \xi) R_1(kn |x - \xi|) \sin \theta' d\theta' \quad (54)$$

式(39)(40)(52)(53)(54)より5元連立方程式となり、これを解くことにより $\sigma, C_{-1}, C_0, C_1, C_2$ が求められる。

4. 翼特性

4.1 局所揚力係数

翼幅方向の任意断面における局所揚力は、翼の上下面の圧力差を翼弦方向に積分して、

$$l(y) = \int_0^c |p(x, y, -0) - p(x, y, +0)| dx \quad (55)$$

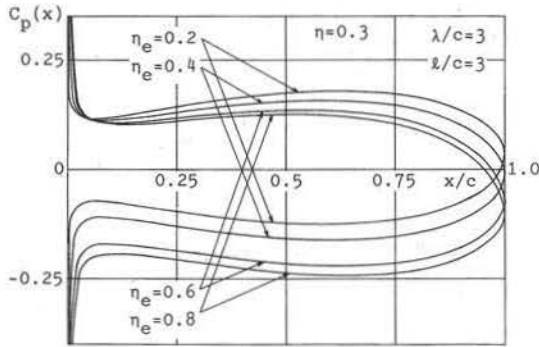


図8 圧力分布 (主流速度分布の影響)

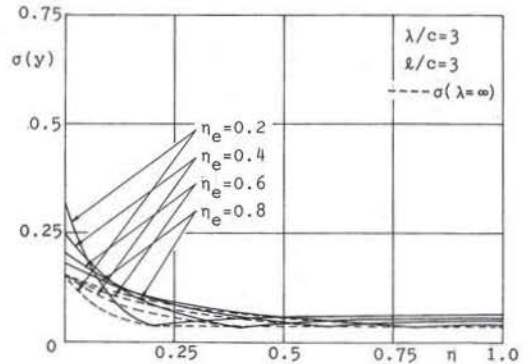


図11 キャビテーション数分布 (主流速度分布の影響)

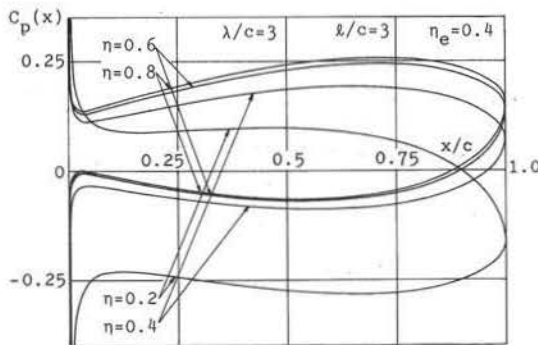


図9 圧力分布 (翼断面位置の影響)

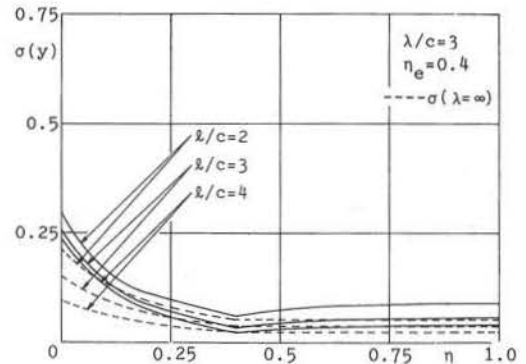


図12 キャビテーション数分布 (空洞長さの影響)

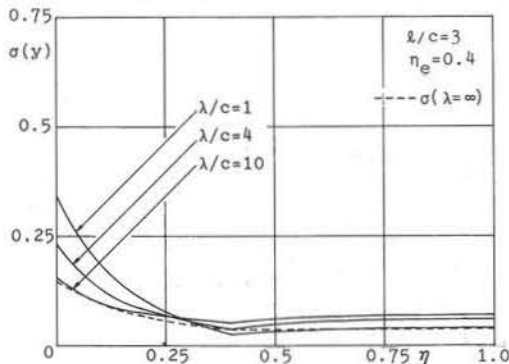


図10 キャビテーション数分布 (アスペクト比の影響)

のようになる。局所揚力係数を次のように定義する。

$$C_e(y) = \frac{2\ell(y)}{\rho U(y)^2} \quad (56)$$

したがって、式(7)(55)(56)より局所揚力係数は次式のようにになる。

$$C_e(y) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{U(y)^2} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) |2A_0(kn) + A_1(kn)| \quad (57)$$

4・2 圧力係数

圧力係数を次のように定義する。

$$C_p = \frac{2p}{\rho U(y)^2} \quad (58)$$

したがって圧力係数は次式のようにになる。

$$C_p(x, y, \pm 0) = -\frac{2}{U(y)^2} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) \left\{ \pm \frac{1}{2} \Gamma(x; kn) + \frac{1}{2\pi} \int_0^x \sum_1(\xi; kn) \frac{d\xi}{x-\xi} + \frac{1}{2\pi} \int_c^{\ell} \sum_2(\xi; kn) \times \frac{d\xi}{x-\xi} + \Delta u_n(x; kn) \right\} \quad (59)$$

4・3 全揚力係数と全抗力係数

全揚力は翼表面上の任意点における翼上下面の圧力差を、弦長方向と翼幅方向に2重積分することによって得られる。すなわち、

$$L = \int_0^{\lambda} \int_0^c |p(x, y, -0) - p(x, y, +0)| dx dy \quad (60)$$

平行壁間にまたがる通気翼の特性

この積分を実行すると全揚力は次のようになる。

$$L = \frac{\pi}{2} c \lambda \rho \sum_{n=1}^{\infty} F(kn)^2 |A_0(kn) + \frac{1}{2} A_1(kn)| \quad (61)$$

全揚力係数を次式のように定義する。

$$C_L = \frac{2L}{c \rho \int_0^{\lambda} U(y)^2 dy} \quad (62)$$

速度分布は式(28)(29)で与えられるので上式の分母の積分は次のようになる。

$$\int_0^{\lambda} U(y)^2 dy = \frac{2}{3} y_e (U_0^2 + U_1^2 + U_0 U_1) + U_1^2 (\lambda - 2y_e) \quad (63)$$

したがって全揚力係数は式(61)(62)(63)より次式のようになる。

$$C_L = \frac{3\pi c \lambda \sum_{n=1}^{\infty} F(kn)^2 |A_0(kn) + \frac{1}{2} A_1(kn)|}{2y_e (U_0^2 + U_1^2 + U_0 U_1) + 3U_1^2 (\lambda - 2y_e)} \quad (64)$$

全抗力係数も同様な手順で求められ、次のようになる。

$$C_D = \frac{3}{8} \frac{(\pi c)^2 \lambda \sum_{n=1}^{\infty} kn F(kn)^2 |A_0(kn) + \frac{1}{2} A_1(kn)|^2}{2y_e (U_0^2 + U_1^2 + U_0 U_1) + 3U_1^2 (\lambda - 2y_e)} \quad (65)$$

4・4 空洞特性

キャビテーション数は式(7)と式(25)から次式のように表される。

$$\sigma(y) = \frac{1}{U(y)^2} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) \sigma_n(kn) \quad (66)$$

空洞厚さ分布は次式で計算される。

$$y_{d2} - y_{d1}(x=c) = \frac{1}{U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) \int_c^{\lambda} \sum_2(x; kn) dx \quad (67)$$

よって次式で表される。

$$\frac{y_{d2}}{c} = 0.15 + \frac{1}{2} \frac{\ell - c}{c U(y)} \sum_{n=1}^{\infty} F(kn) Y(y; kn) [C_{-1}(kn) (1 - \cos \tau) + C_0(kn) (\tau + \sin \tau) + \frac{1}{2} C_1(kn) (\tau - \frac{1}{2} \sin \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} C_m(kn) \times \left[\frac{\sin |(m-1)\tau|}{m-1} - \frac{\sin |(m+1)\tau|}{m+1} \right]] \quad (68)$$

5. 数値計算例

主流速度は式(28)(29)で与えられ、図2に表される。翼はNACA(a=1.0)ベースベンテドバラボラについて計算した。

図3, 4は翼幅方向揚力係数分布を示したものである。横軸 $\eta = 2y/\lambda$ で与えられる翼幅方向の座標である。主流速度分布パラメータ η_e が小さいほど側

壁近傍の揚力勾配が急峻になっている。またアスペクト比 λ/c が大なるほど揚力分布は平坦になっている。

図5は全揚力係数と誘導抗力係数を示しており、横軸はアスペクト比の逆数である。主流速度分布パラメータ η_e が小さいほど揚力係数は大きく、誘導抗力係数は小さな値となっている。

図6, 7, 8, 9は翼断面圧力分布を示したものである。空洞長さ、アスペクト比による影響は小さいが、主流速度分布パラメータが小さいほど圧力分布は大きく、翼断面位置が側壁に近いほど圧力分布が小さくなっている。

図10, 11, 12は翼幅方向キャビテーション数分布を示したものである。アスペクト比が小さいほど平坦になり、空洞が短いほど大きな値になっている。また主流速度分布パラメータが小さいほど側壁での値が大きくなっている。

6. 結 言

平行壁間を流れるせん断流中のベースベンテドバラボラの翼および空洞特性を求めるために、基礎式の誘導とその解法を示し、揚力係数分布、圧力係数分布、全揚力係数、誘導抗力係数およびキャビテーション数分布に及ぼす種々のパラメータの影響を明らかにした。

参考文献

(1)伊藤・木村, 通気翼の線形解析, 秋田高専研究紀要, No.22(1987), PP.13-19.
 (2)伊藤, 平行壁間にまたがる平板まわりの流れの解析法, 秋田高専研究紀要, No.24(1989), PP.19-24.
 (3)Honda, M., Theory of a Thin Wing in a Shear Flow, Proc. R. Soc., Ser.A, 254(1960), P.372-394.
 (4)Schlichting, H., Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter, VDI-Forschungsheft., 21-447(1955), PP.1-35.