# 条件つき極値問題のグラフ的解法

吉 村 卓

# Graphical Method for Conditional Extremum

Takashi YOSHIMURA

(1992年10月30日受理)

## 1. 序 論

2変数の関数 $z = f(x, y)$ の極値を考えるには，これを2次曲面

$f(x+h, y+k) = f(x, y)+$

$(hD_x+kD_y)f(x, y)+1/2(hD_x+kD_y)^2f(x, y)+\cdots$

で近似し，

$f_x(a, b) = 0,\ f_y(a, b) = 0$

なる点 $(a, b)$ で，2次形式

$(hD_x+kD_y)^2f(x, y)$

の符号を調べる。正定符号ならば $f(a, b)$ は極小値で，負定符号ならば極大値である。すなわち，2次形式を定義する行列の行列式の値が正なるとき，

$f_{xx}(a, b) > 0$ ならば $f(x, y)$ は $(a, b)$ で極小，

$f_{xx}(a, b) < 0$ ならば $f(x, y)$ は $(a, b)$ で極大である。これをグラフの上で考えると，接平面が xy 平面に平行となる曲面上の点で，曲面が下に凸ならば極小で，上に凸ならば極大であることがわかる。

一方

条件：$g(x, y) = 0$

のもとで，$z = f(x, y)$ の極値を求めるには，ラグランジュの乗数法によれば，

$F(x, y, \lambda) = f(x, y)-\lambda\ g(x, y)$

の極値問題を考えることになる。したがって，

$$\begin{cases} f_x-\lambda\ g_x = 0 \\ f_y-\lambda\ g_y = 0 \end{cases}$$

から

$\lambda = f_x/g_x = f_y/g_y$

したがって

$f_x/f_y = g_x/g_y$

すなわち，2つの陰関数表示の曲線

$f(x, y) = c,\ g(x, y) = 0$

の接線が一致する点が極値を与える候補点である。

例えば，条件 $x^2+y^2 = 1$ のもとで，$z = xy$ の極値を与える点の候補点は

$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ の4点である。

これらの点で $f(x, y) = xy$ が実際に極値をとることを確かめるには，これら4点で曲面 $z = xy$ の等高線が単位円に接することを知ればよい。その結果 z は $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$，$(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ で極大値 1/2を，$(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$，$(-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ で極小値−1/2をとることが分かる。図1は領域 $-2 \leqq x, y \leqq 2$ で曲面の等高線を $z = c = -0.75\sim0.75$，刻み0.25で描いたものである。

また例えば，条件 $xy = 1$ のもとで $x^2+y^2$ の極値を与える点は，曲面 $z = x^2+y^2$ の等高線が直角双曲線 $xy = 1$ と接する点である。そして，その点は $(1,\ 1)$ ならびに $(-1, -1)$ で，極小値は2である。図2は $-2 \leqq x,\ y \leqq 2$ において，$z = 1.00\sim3.50$，刻み0.5で等高線を描いたものである。

しかし，等高線の図で考えるのは直接的とはいえない。より直観的に考えるには，xy 平面上の曲線

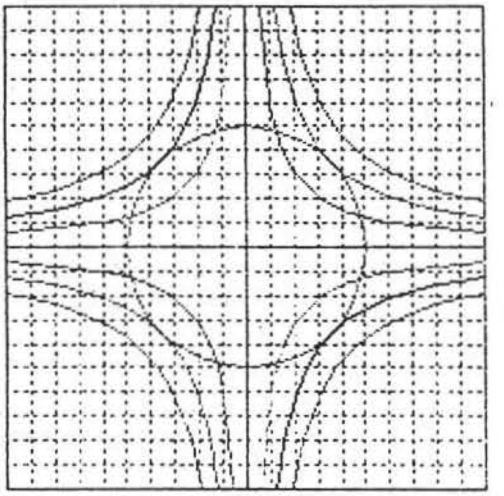

図1

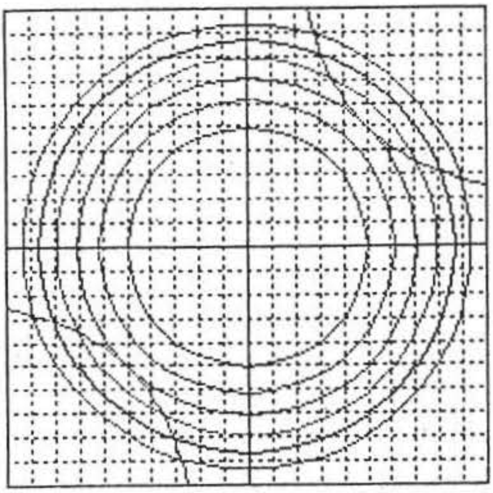

図 2

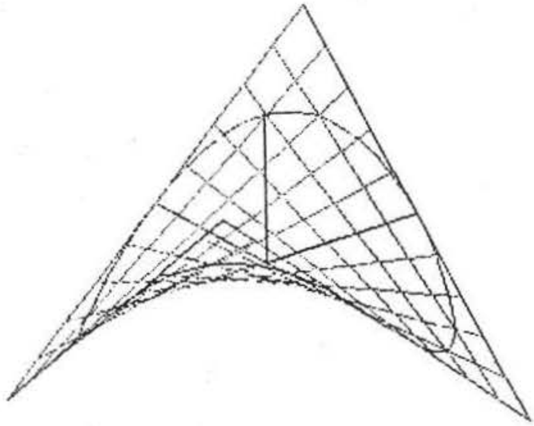

図 4

$g(x, y) = 0$ の上部にあって，曲面 $z = f(x, y)$ 上の最高点と最低点を探せばよい。すなわち柱面 $g(x, y) = 0$ と曲面 $z = f(x, y)$ との交線を描いてやればよい。アルゴリズムは次のようになるであろう。

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ のグラフを描く。

(2) 陰関数表示 $g(x, y) = 0$ から媒介変数表示

$x = x(t),\ y = y(t)\quad (t\min \leqq t \leqq t\max)$

に書き換え，曲線

$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t))\ (t\min \leqq t \leqq t\max)$ を描く。

図 3 は第 3 象限の方向から見て曲面 $z = x^2+y^2$

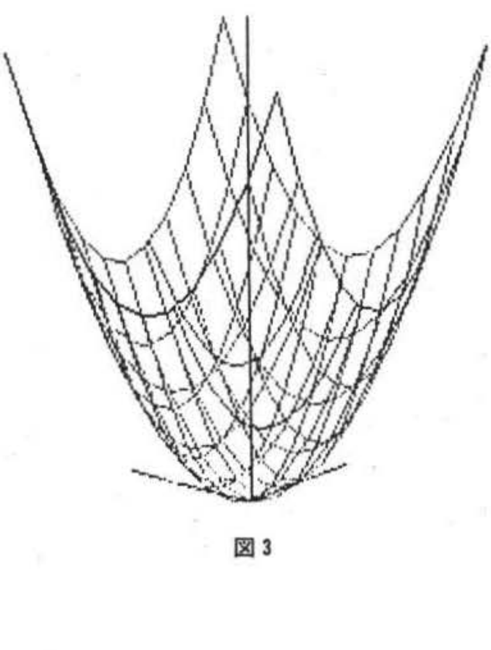

図 3

を $-2 \leqq x, y \leqq 2$ の範囲で描いたもので，図 4 は曲面 $z = xy$ を $-1 \leqq x,\ y \leqq 1$ の範囲で $\theta = 0.35\pi$，$\phi = 1.3\pi$ の方向から見た図である。

## 2．曲面の表示方法

3 次元空間内にある物体を 2 次元平面上に表現する手法には，透視図法と投影図法の 2 つがある。前者は視点が物体から有限の距離にあり，後者は視点を物体から無限遠の位置に置く。物体から有限の位置に視点を置いた透視図法は写実的であり，視点を無限遠の位置に置く投影図は何か不自然な感じを与える。すなわち，透視図法で描かれた図には遠近感があり，投影図法では平行線は平行線のままに描かれ，遠近感を持たせることはできない。しかし，物体のすべての部分を正確に描写するとすれば投影図法のほうに分がある。ここでは，投影図の手法を用いることとする。

投影とは物体に平行光線を当てて影を作ることである。影を映す面，すなわち投影面を光線に垂直に置いた場合正射影という。

物体があればそれをいろいろな方向から見たり描いたりしたい。そのために視線を移動して考える。視線の Y 軸，Z 軸の回りの回転角をそれぞれ $\theta$，$\phi$ とすると，空間内の点 $P(x, y, z)$ の投影面上への正射影 $Q(u, v)$ は

$$\begin{cases} u = -\sin(\phi)x+\cos(\phi)y \\ v = -\cos(\theta)\cos(\phi)x-\cos(\theta)\sin(\phi)y+\sin(\theta)z \end{cases}$$

で表される[1]。ここに，視線の逆方向ベクトル $(a, b, c)$ はそれを極座標で表すと

$(\sin(\theta)\cos(\phi),\ \sin(\theta)\sin(\phi),\ \cos(\theta))$
で与えられる。

描くべき曲面上の点 P(x, y, z) は上の変換式によって投影面上の点 Q(u, v) に写る。曲面を描くには，描こうとする曲面上に何本かの曲線を描くことによって曲面を表現する。また曲線を描くには，曲線上の点を順次線分で結んで得られる折れ線でもって曲線を近似的に描く。この折れ線の変換像を投影面上に描いて曲線を表現することになる。

したがって，曲面 z=f(x, y) のグラフを描くには，曲面を媒介変数表示

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = f(x(u, v), y(u, v)) \end{cases}$$

に書き換え，u 曲線，v 曲線の像を投影面上に描画すればよい。

また，柱面 g(x, y) = 0 と曲面 z = f(x, y) との交線を描くには，平面曲線 g(x, y) = 0 を媒介変数表示

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

に書き換え，空間曲線

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

の像を投影面上に描画する。

物体が不透明な材質でできていれば，向こう側の線は陰に隠れて見えない。見えない線を描かない，すなわち，隠線消去の方法には最大・最小法と呼ばれる方法もあるが，ここでは，曲面の法線と視線との内積の値によって隠線処理を行うこととする。

楕円面のような閉曲面の場合，視線の逆方向ベクトルと曲面の外法線ベクトルとの内積が負ならばその点は見えないが，非負ならば見える位置にある。しかし，双曲面のように閉曲面でない場合，曲面の裏側の点で内積が負のとき，それは視線の逆方向ベクトルと内法線ベクトルとの内積が正であることを示し，裏面のこの点は見える位置にある。

媒介変数表示の曲面

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

の法線ベクトルは　$(x_u, y_u, z_u)\times(x_v, y_v, z_v)$
である。また，陽関数表示の曲面

$z = f(x, y)$
の場合，これを媒介変数表示

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

に書き直して考えれば，その法線ベクトルは

$(1, 0, f_x)\times(0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$
で与えられることが分かる。これと視線の逆方向ベクトル

$(\sin(\theta)\cos(\phi),\ \sin(\theta)\sin(\phi),\ \cos(\theta))$
との内積の値で点が見えるか見えないかを判断する。

図 5 は曲面 $z = x^2 - y^2$ を $-1 \leqq x, y \leqq 1$ の範囲で $\theta = 0.3\pi$, $\phi = 1.3\pi$ の方向から見た隠線処理な

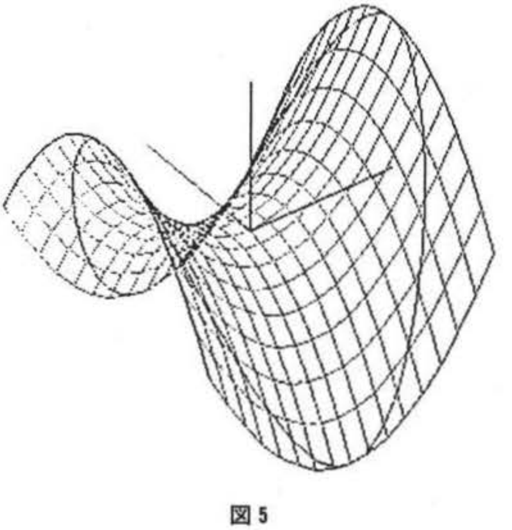

図 5

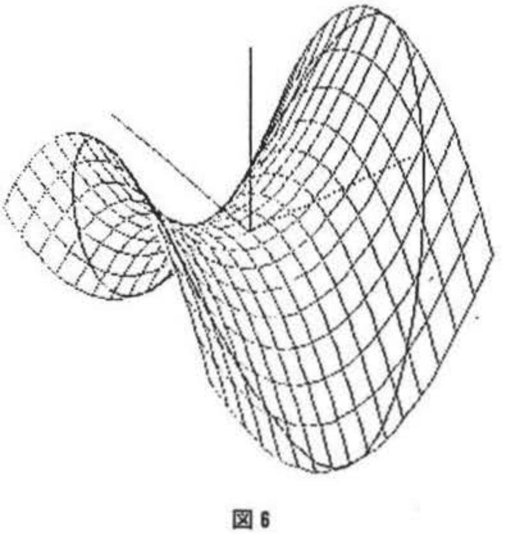

図 6

しの図で,図6はこれに隠線処理を施した図である。

図から $x^2+y^2=1$ なる条件のもとで $z=x^2-y^2$ の極値は $x=0$, $y=\pm1$ で極小値 $z=-1$ を, $x=\pm1$, $y=0$ で極大値 $z=1$ をとることが分かる。しかし，この問題はラグランジュの乗数法ではうまく解けない。条件式から一方の変数を他方の変数で表現し，それを目的関数の式に代入して，1変数の極値問題として解かなければならない。

## 3．結　論

ラグランジュの乗数法を使うだけでは，極値を与える候補点がわかるだけで，それが極大なのかあるいは極小なのかは，別に何らかの情報が与えられない限り分からない。

コンピュータのグラフィックス機能を用いて，曲面をグラフィック表現できれば直観的な情報が得られ，条件付き極値問題に対し有効な手段となる。

しかし，曲面の投影図あるいは透視図だけでは，極大か極小かは分かっても，極値を与える点の正確な位置は分からない。そこで，等高線図を併用するなら，その正確な位置を知ることができる。しかし，その座標はとなると，図からその正確な値を読みとることはできない。最終的には乗数法における連立方程式の解を数値的に解かざるをえない。

こうして，S(記号，すなわち数式)，G(グラフィックス)，N (数値) の三位一体の手法が不可欠となる。

## 参考文献

1) 岸　正倫：曲面のCG入門　サイエンス社　1992年