2点境界値問題の数値解法

吉　村　　卓

§1 序

常微分方程式の数値解法の要領は変域を小区間に分割して初期状態からわずかに離れたところの状態を求め，またこの状態をもとにしてその次の状態を求めるという方法で逐次に計算してゆくことである。ところで，初期値問題にあっては微分方程式の解を決めるに必要なだけの初期条件がすべて与えられているから，このような方法で数値的に解ける。しかるに，2点境界値問題の場合には一端から逐次に解を組立ててゆこうとしてもその一端における初期値のすべては与えられていないから，初期値を適当に仮定して逐次に数値計算を行なってみて，それが他端の条件を満足しなければ最初の端にかえってやりなおすといった試行錯誤的な方法によらざるを得ない。もっとも，与えられた微分方程式が線形で

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{1}$$

境界条件が

$$y(a)=y_a,\ y(b)=y_b$$

であれば，重ね合わせの原理が利用できて

$u(x)$，$v(x)$　をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} &u''+pu'+qu=f \\ &u(a)=y_a,\ u'(a)=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &v''+pv'+qv=0 \\ &v(a)=0,\ v'(a)=1 \end{aligned}\right\}$$

の解であるとすると

$$y(x)=u(x)+cv(x)$$

は任意のcに対して(1)と$y(a)=y_a$　を満足している。

したがってcを

$$u(b)+cv(b)=y_b$$

を満足するように定めれば解が求まる。かくしてこの場合には2つの初期値問題を解くことになる。

以下では，これとは異なった2点境界値問題の数値解法について考えてみよう。

§2 微分方程式を積分方程式に変換して解く方法

積分方程式を利用すると，積分方程式は両端の条件を含んでいるから，試行錯誤的な方法によって解を求める必要がない。

まず，n階常微分方程式

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_0(x)y=f(x) \tag{2}$$

を初期条件

$$y_0,\ y_0^{(1)},\ \cdots,\ y_0^{(n-1)}$$

を与えて解くことを考える。

いま

$$y^{(n)}=X$$

とおいて，次々に積分してゆけば

$$y^{(n-1)}=\int_0^x X(t)dt+y_0^{(n-1)}$$

$$\begin{aligned} y^{(n-2)} &= \int_0^x\int_0^x X(t)dtdx+y_0^{(n-1)}x+y_0^{(n-2)} \\ &= \int_0^x X(t)dt\int_t^x dx+y_0^{(n-1)}x+y_0^{(n-2)} \\ &= \int_0^x (x-t)X(t)dt+y_0^{(n-1)}x+y_0^{(n-2)} \end{aligned}$$

同様にして

$$y^{(n-r)}=\int_0^x\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}X(t)dt+\frac{y_0^{(n-1)}}{(r-1)!}x^{r-1}+\cdots+y_0^{(n-r+1)}x+y_0^{(n-r)} \tag{3}$$

となる。これらを(2)に入れて整理すると積分方程式

$$a_n(x)X(x)-\int_0^x K(x,\ t)X(t)dt=F(x)$$

となる。ただし

$$K(x,\ t)=-\sum_{r=1}^{n}a_{n-r}(x)\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$\begin{aligned} F(x)=f(x)&-y_0^{(n-1)}a_{n-1}(x) \\ &-(y_0^{(n-1)}x+y_0^{(n-2)})a_{n-2}(x)-\cdots \\ &-\left\{\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}x^{n-2}+\cdots+y_0\right\}a_0(x) \end{aligned}$$

かくて$a_n(x)$がxの考えている区間で0になることがなければボルテラ型第2種積分方程式になる。$X(x)$が求ま

れば解y(x)は次のようになる。

$$y(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}X(t)dt+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots+y_0^{(1)}x+y_0$$

つぎに積分方程式

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)y(t)dt=f(x) \qquad (F_2)$$

の数値解法は，積分方程式を連立方程式で近似してそれを解くことに帰する。

いまx, t平面において適当に

$$x=x_i,\ t=t_j\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

なるn^2個の点をとり（ただし$x_i=t_i$ととる），これらの点での函数y(x)，f(x)，K(x,t)

の値を

$$y(t_j)=y_j,\ f(x_i)=f_i,\ K(x_i,\ t_j)=K_{ij}$$

とする。代表座標点y_jでとるべき重みをw_jとすると方程式(F_2)は

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\lambda w_j K_{ij})y_j=f_i$$

である。ここでδ_{ij}はクロネッカーのδである。この連立方程式を解いて，y_1, y_2, …, y_nを求めればよい。

例として，次の微分方程式を解いてみよう。

$$\begin{cases} y''(x)-y(x)+x=0 & (4)\\ y(0)=y(1)=0 & (5)\end{cases}$$

$y''=X$

とおくと，(3)により

$$y(x)=\int_0^x (x-t)X(t)dt+y_0^{(1)}x+y_0$$

となるが，境界条件(5)より

$$0=\int_0^1 (1-t)X(t)dt+y_0^{(1)}$$

であるから(4)は

$$X(x)-\int_0^x (x-t)X(t)dt+x\int_0^1 (1-t)X(t)dt+x=0 \qquad (6)$$

となる。よって(6)はフレドホルム型第2種積分方程式

$$X(x)-\int_0^1 K(x,\ t)X(t)dt=-x$$

となる。ただし

$$K(x,\ t)=\begin{cases} t(x-1) & 0\leqq t<x\\ x(t-1) & x<t\leqq 1\end{cases}$$

これを数値計算すれば(4)により

$y=X+x$

としてy(x)を求めることができる。

代表座標点として区間〔0, 1〕を2n=10等分し，定積分の計算にシンプソン則を採用して得られる連立方程式をガウス・ザイデル法によって数値計算した結果は次の通りである。ただし，収束判定用の誤差限界を$\varepsilon=10^{-5}$とした。

y(0.1)=0.0149
y(0.2)=0.0287
y(0.3)=0.0413
y(0.4)=0.0504
y(0.5)=0.0573
y(0.6)=0.0582
y(0.7)=0.0555
y(0.8)=0.0442
y(0.9)=0.0279

§3 ダイナミック・プログミング法による解法

微分方程式

$$\frac{d}{dx}(p(x)y')-q(x)y-f(x)=0,$$

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

につい考える。この方程式は汎函数

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y)dx,$$

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

の極値を求める変分問題の必要条件として出てくるオイラーの方程式である。

ここで，少し一般化して，汎函数

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,z)dx,\quad \frac{dy}{dx}=z,\ y(a)=c \qquad (7)$$

の極値を求める変分問題に対するダイナミック・プログラミング（D.P.と略称）による解法について考えよう。

連続函数y(x)の代りに離散変数a=Mh, (M+1)h, …, Nh=bなる各点でのy(x)の値のみを考える。

ここに$h=\frac{b-a}{N-M}$とする。汎函数(7)の極値を求める代りに，有限の和

$$J_M(y)=\sum_{i=M}^{N-1}F(x_i, y_i, z_i)h,\ y_{i+1}=y_i+z_i h,\ y_M=c$$

の極値を求める。ここに$x_i=ih$, $y_i=y(x_i)$

$z_i=z(x_i)$である。この右辺でy_iに関係する項は i 項と(i−1) 項である。すなわち

$F(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{h})h$ と $F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h})h$ である。よって $\frac{\partial J_K(y)}{\partial y_i} = 0$ の条件式は

$$F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h})h + F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h})(-\frac{1}{h})h$$
$$+F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{h})\frac{1}{h}h = 0$$
$$(i = M, M+1, \cdots, N-1)$$

となる。これは

$$F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}) - \frac{\Delta F_{y'}}{h} = 0$$

となる。よって$n \to \infty$, $h \to 0$ とするとオイラーの方程式

$$F_y - \frac{d}{dy}F_{y'} = 0$$

が導ける。

ところで，$J_k(y)$の極値はk，cおよびhの函数とみなされる。hを一定にしておいて，この極値問題を状態変数c，kを有する多段決定過程の問題とみなすと，函数列

$$f_k(c) = \underset{\{y_i\}}{\mathrm{Min}}\ J_k(y)$$

が得られる。D.P.の最適性の原理を適用して

$$f_k(c) = \underset{z_k}{\mathrm{Min}}\left[F(x_k, c, z_k)h + f_{k+1}(c + z_k h)\right],$$
$$k = M, M+1, \cdots, N-2 \qquad (8)$$
$$f_{N-1}(c) = \underset{z_{N-1}}{\mathrm{Min}}\ F(x_{N-1}, c, z_{N-1})h$$

なる漸化函数方程式を得る。

y_Nの値が前以て与えられているときには

$f_{N-1}(c)$は

$$f_{N-1}(c) = F(x_{N-1}, c, \overline{z}_{N-1})h$$

によって決定される。ここに$\overline{z}_{N-1}$は

$$y_N = c + \overline{z}_{N-1}h$$

なる関係によって定まる。云いかえれば，状態cから与えられた状態y_Nに至る条件で決定される。$f_{N-1}(c)$の値がこの方法で得られれば，計算は(8)を用いて進められる。

このように函数方程式の手法は2点境界値問題を初期値問題におきかえる。しかも，D.P.の手法はzに制限があると数値計算を簡単にする。というのは，zに制限があると$(N-1)$段の任意の状態からN段のy_Nに至ることは一般には不可能で，$f_{N-1}(c)$はy_Nに至ることのできる状態cに対してのみ決められるからである。同様に$f_{N-2}(c)$は$(N-1)$段の可能なる状態に至ることのできるcに対してのみ決められる。そこで，zに対する制限が与えられていないとき，zのとりうる値の範囲を求める方法について考えよう。

汎函数

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, z)dx, \quad \frac{dy}{dx} = z,$$
$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \qquad (9)$$

を極値にするような停留函数$y(x)$をみいだす変分問題を考える。このとき許容函数には基底函数列$\{\omega_k(x)\}$の線形結合

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k(x) \qquad (10)$$

を考える。式(10)を式(9)に入れると

$$J(y_n) = J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

となって，a_1，a_2，$\cdots$，a_nに関する通常の極値問題となる。よって式(9)を極値にするものは条件式

$$\frac{\partial J(y_n)}{\partial a_1} = 0, \ \cdots\cdots\cdots\cdots, \ \frac{\partial J(y_n)}{\partial a_n} = 0$$

により決まる。そのようなa_kの値をa_k^*と書くと

$$y_n^* = \sum_{k=1}^{n} a_k^* \omega_k(x)$$

をもって変分問題(7)の近似解とみなすことができる。

基底函数系としては

$$\omega_0(x) = \frac{y_b - y_a}{b-a} + y_a$$
$$\omega_k(x) = (x-a)(x-b)x^k \text{ または } \omega_k(x) = \sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a}$$
$$(k = 1, 2, \cdots,)$$

をとっておけばよい。

このような方法をリッツの方法という。かくして$y(x)$の近似解$y_n^*(x)$が求まったら，$\frac{dy_n^*}{dx} = z$としてzの変動しうる範囲が定まる。

例として再び先にあげた微分方程式

$$y''(x) - y(x) + x = 0, \ y(0) = y(1) = 0$$

の数値解を求めてみよう。これは変分問題

$$\text{Min } J(y)=\text{Min}\int_0^1 (y'^2+y^2-2xy)dx$$

の停留函数y(x)を求める問題に変換される。

極値にすべき汎函数 $\int_0^1 (y'^2+y^2-2xy)dx$ を

差分 $\sum_{i=0}^{N-1}(z_i^2+y_i^2-2x_iy_i)h$ で近似すると，これに対して函数方程式

$$f_k(c)=\underset{z_k}{\text{Min}}\left[(z_k^2+c^2-2cx_k)h+f_{k+1}(c+z_kh)\right],$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-2$$

$$f_{N-1}(c)=(z_{N-1}^2+c^2-2cx_{N-1})h$$

が得られる。ここに

$$z_{N-1}=\frac{y_n-c}{h}$$

また，リッツの方法で

$$y=\sum_k a_k(1-x)x^k \text{ または } y=\sum_k a_k \sin k\pi x$$

として第1近似を求めてみると，$y=\frac{5}{22}(1-x)x$ または $y=0.06\sin\pi x$となる。これから $z=\frac{dy}{dx}$に対する制約条件として $|z|\leqq 0.22$ を得る。N＝10 として数値計算の結果は次の通りである。

y(0.1)=0.015
y(0.2)=0.029
y(0.3)=0.041
y(0.4)=0.051
y(0.5)=0.057
y(0.6)=0.059
y(0.7)=0.055
y(0.8)=0.045
y(0.9)=0.027

参考までにHARP 103によるプログラムを次に記す。

```
#TWO POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM
   ARRAY GK(249), GK1(249), Z1(10,249)
   YO=0.
   YN=0.
   N=10
   DELTA=0.1
   K=N
   CMIN=-0.144
   CMAX=0.101
   ZMIN=-0.36
   ZMAX=-0.06
   C=CMIN
10 I=C*1000.+145.
   Z=(YN-C)/DELTA
   W=(Z↑2+C↑2-FLOATF(K-1)*2)*C
      *DELTA)*DELTA
   Z1(K,I)=Z
   GK1(I)=W
   C=C+0.001
   IF(C-CMAX)10,10,20
20 K=K-1
40 CMIN=CMIN+FLOATF(K-1)*0.004
   CMAX=CMAX-FLOATF(N-K-2)*0.003
   ZMIN=ZMIN+0.04
   ZMAX=ZMAX+0.03
   C=CMIN
50 I=C*1000.+145.
   SMA=1000.
   Z=ZMIN
60 J=(Z*DELTA+C)*1000.+145.
   W=(Z↑2+C↑2-ELOATF((K-1)*2)*C
      *DELTA)*DELTA+GK1(J)
   IF(SMA-W)80,80,70
70 SMA=W
   V=Z
80 Z=Z+0.01
   IF(Z-ZMAX) 60,60,90
90 Z1(K,I)=V
   GK(I)=SMA
   C=C+0.001
   IF(C-CMAX) 50,50,100
100 DO 110 I=1,249
110 GK1(I)=GK(I)
   K=K-1
   IF(K) 130,130,40
130 K=0
   YK=YO
140 XK=FLOATF(K)*DELTA
   K1=K+1
   I=YK*1000.+145.
   W=Z1(K1,I)
   TYPE230,W,XK,YK
   YK=W*DELTA+YK
   K=K+1
```

```
      IF(K-N) 140,150,150
150   TYPE 240, YK
      STOP
230   FORMAT(3E10.3)
240   FORMAT(20XE10.3)
      END
```

参 考 文 献

林　毅，村　外志夫；変分法，コロナ社

近藤次郎；積分方程式，培風館

R.E.Bellman and S.E.Dreyfus; Applied Dynamic Programming, Princeton Univ. Press