

橋梁たわみ曲線の考察

米 長 泰* ・服 部 有里子**
高 橋 正 幸*** ・伊 藤 典 幸***

Some study on the deflection curve of steel bridges

Yasushi YONENAGA , Yuriko HATTORI
Masayuki TAKAHASHI , Noriyuki ITO

(昭和 63 年 10 月 31 日受理)

Up to this time, many bridge engineers in the world have been analyzed steel bridge deflection curves. We tried to analyze them by drawing graphical figures as a problem of pure mathematics, from a inversive standpoint. Then we compared deflection curves with approximate parabolic curves and circular curves, and established simplified formulas concerning thier circular radiuses.

1. 本文の趣旨

橋梁のたわみ曲線は単純支持梁に等分布荷重が満載された場合 4 次式の曲線となる。たわみ計算は橋梁たわみ剛性の検証や製作そり設定等の目的で実行され、その場合勿論対象範囲は橋梁の左端から右端迄を論ずれば十分である。ただし本稿では発想を逆転させ、対象を遠く橋梁の外に迄拡大解釈して、4 次曲線がどんな姿のグラフを描くのか、考究を試みた。橋工学上は意味を無さないことであるが、世界中の橋梁技術者が日頃慣れ親しんでいる曲線であることを思えば、純粋数学として全貌に取組んでみるのも一興かと考えた。

次に 4 次曲線を放物線及び円弧と比較し、三者の誤差を把握することによって、単純支持梁・連続梁の曲率半径の近似式設定を試みた。一服の清涼剤としてささやかな話題を二件提供したい。

2. たわみ曲線の拡大解釈

2・1 集中荷重 P によるたわみ曲線

図 1 のような単純支持梁に集中荷重 P が載荷されると、梁には曲げモーメントが発生し、梁はたわむ。

横軸 x におけるたわみ曲線の曲率半径を ρ_x とおけば

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{EI} \tag{1}$$

と表わされる。ただし EI は梁の曲げ剛性、 M_x は横軸 x における曲げモーメントである。

曲率半径 ρ_x は文献¹⁾等により

$$\frac{1}{\rho_x} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

本題においては $y_{max} \div 10^{-3} \ell$ 程度であるから上式の

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \div 1 \text{ とみなして、かつ符号を考え}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M_x}{EI} \tag{3}$$

これを 2 回積分するとたわみ y が得られる²⁾ 即ち

$$y = - \iint \frac{M_x}{EI} dx dx + c_1 x + c_2 \tag{4}$$

単純支持梁の境界条件は³⁾

$$\begin{pmatrix} x=0 \\ y=0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x=0 \\ y''=0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x=\ell \\ y=0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x=\ell \\ y''=0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

さて、図 1 のような集中荷重 P により、曲げモーメントは x の 1 次式となるから、2 回積分することに

* 秋田工業高等専門学校土木工学科
** 三菱重工業株式会社技術本部
*** 秋田工業高等専門学校土木工学科学生

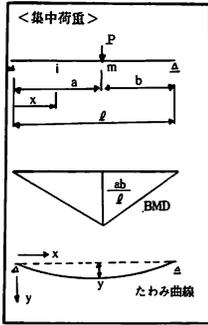


図1 p によるたわみ曲線

よりたわみ曲線 y は x の 3 次式となる。文献²⁾ により結果のみを示すと

$$0 \leq x \leq a \quad y_1 = \frac{Pbx}{6EI\ell} (\ell^2 - b^2 - x^2) \quad (6)$$

$$a \leq x \leq \ell \quad y_2 = \frac{P}{6EI\ell} \{bx(\ell^2 - b^2 - x^2) + \ell(x-a)^3\} \quad (6)$$

上式は $\begin{cases} x = a \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = a \\ y'_1 = y'_2 \end{cases} \quad (7)$

となっているから、なめらかな曲線である。

2・2 等分布荷重 q によるたわみ曲線

図2のような単純支持梁に等分布荷重 q が載荷されると曲げモーメント図は x の 2 次式となり、たわみ y は x の 4 次式となる。文献²⁾ により曲線式は

$$y = \frac{q\ell^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 \right\} \quad (8)$$

y_{\max} は $x = \ell/2$ のとき生じ

$$y_{\max} = \frac{5q\ell^4}{384EI} \quad (9)$$

となる。

2・3 たわみ曲線の座標変換

考察の対象を (8) 式の等分布荷重曲線に絞る。次に解析を容易にするため、次の座標変換を行なう。

$$y = Y, \quad \frac{x}{\ell} = X, \quad \frac{5q\ell^4}{384EI} = \bar{\delta} \quad (10)$$

この時 (8) 式は次のように表わされる。

$$Y = \frac{16\bar{\delta}}{5} (x - 2x^3 + x^4) \quad (11)$$

これらは図3を参照されたい。梁は $0 \leq x \leq \ell$ の間で論じられたものが、これからは $0 \leq X \leq 1$ の範囲に写像される。

2・4 4 次曲線の特性解析

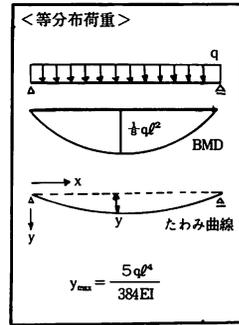


図2 q によるたわみ曲線

(11) 式を通常の橋梁の範囲 $0 \leq X \leq 1$ に捉われず、 $-\infty$ から $+\infty$ 迄の間に 4 次曲線がどんな特性を示すかを解析してみることにする。これが本題でいう「拡大解釈」である。

(11) 式を因数分解すると

$$Y = \frac{16\bar{\delta}}{5} \times (x-1)(x^2-x-1) \quad (12)$$

これより 4 次式の根は

$$X=0, X=1, X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (13)$$

次に (11) 式を微分すると

$$\frac{dY}{dX} = \frac{16\bar{\delta}}{5} (1-6x^2+4x^3) = \frac{16\bar{\delta}}{5} (2x-1)(2x^2-2x-1) \quad (14)$$

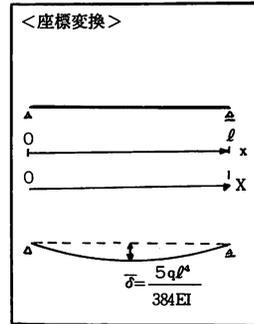


図3 座標変換

この 3 次式の根を求めると

$$X = \frac{1}{2}, X = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \quad (15)$$

X がこれら 3 点の値をとるとき、 Y は極大または極小となる。

次に曲率は $\bar{\delta} \div 10^{-3}$ 程度であるから Y'' に等しいと考える。(14) 式を更に微分することにより

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{16\bar{\delta}}{5} (-12x+12x^2) = \frac{192\bar{\delta}}{5} \times (x-1) \quad (16)$$

橋梁たわみ曲線の考察

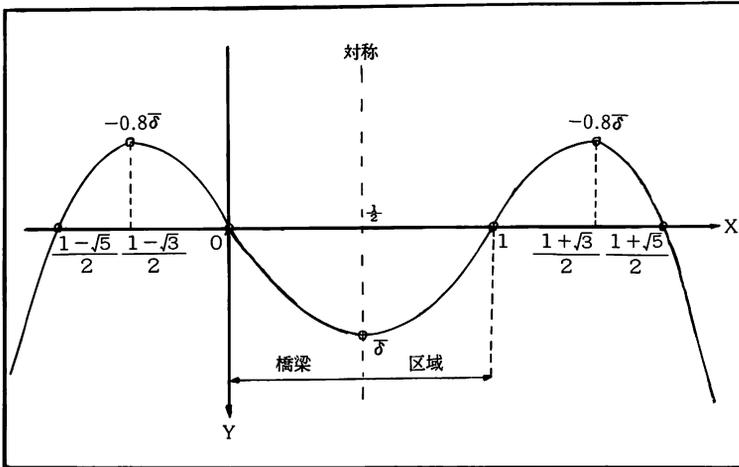


図4 4次曲線の全貌

表1. 4次曲線の特性値

関数値 主要点	たわみ Y	勾配 dy/dx	曲率 d²y/dx²	曲率半径 ρ	備考
$X = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	$-7.155\bar{\delta}$	$38.4\bar{\delta}$	$\frac{0.02604}{\bar{\delta}}$	
$X = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$-0.8\bar{\delta}$	0	$19.2\bar{\delta}$	$\frac{0.05208}{\bar{\delta}}$	Y極小
X = 0	0	$3.2\bar{\delta}$	0	∞	橋左端
$X = \frac{1}{2}$	$\bar{\delta}$	0	$-9.6\bar{\delta}$	$\frac{0.10417}{\bar{\delta}}$	橋中央
X = 1	0	$-3.2\bar{\delta}$	0	∞	橋右端
$X = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$-0.8\bar{\delta}$	0	$19.2\bar{\delta}$	$\frac{0.05208}{\bar{\delta}}$	Y極小
$X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0	$7.155\bar{\delta}$	$38.4\bar{\delta}$	$\frac{0.02604}{\bar{\delta}}$	

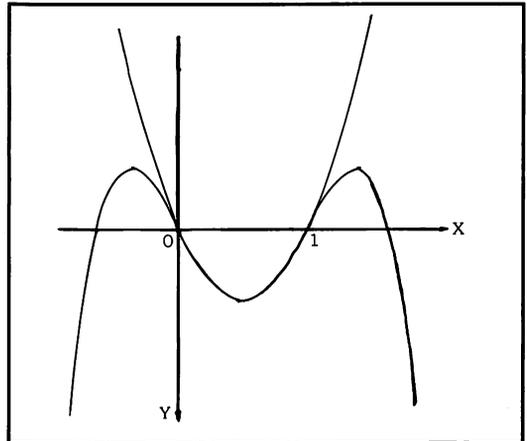


図5 4次曲線と放物線の近似

これより曲率半径は

$$\rho_x = \frac{5}{192\bar{\delta} \times (x-1)} \quad (17)$$

(16) 式より曲率は $X = 1/2$ において最大、 $X = 0$ と $X = 1$ においてゼロとなる。これら一連の極大極小値、勾配、曲率、曲率半径を計算し、表1にとりまとめた。これをグラフに描くと図4のようになる。なお参考に $(0, 0)$ $(1/2, \bar{\delta})$ $(1, 0)$ の3点を通る近似放物線との関連を図5に示した。

3. たわみ曲線の近似 (単純支持梁)

3・1 近似比較の仕方

全長等分布荷重曲線 (8) 式と放物線と円弧の三曲線の近似性を比較する。比較条件として三曲線は

いずれも下記3点を通るものとする。

$$\begin{cases} x=0 & x=l & x=l/2 \\ y=0 & y=0 & y=\bar{\delta} \end{cases} \quad (18)$$

3・2 たわみ曲線式

(8) 式をあらためて次のように表わす。

$$y_{10} = \frac{16\bar{\delta}}{5} \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right\} \quad (19)$$

3・3 放物線

$y_{20} = Ax(l-x)$ とおけば $x=l/2$ において $y_{20} = \bar{\delta}$ であるから

$$\bar{\delta} = A \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \quad \therefore A = \frac{4\bar{\delta}}{l^2}$$

従って $y_{\text{㉔}} = \frac{4\bar{\delta}}{\ell^2}(\ell x - x^2) = 4\bar{\delta} \left\{ \left(\frac{x}{\ell}\right) - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right\}$ (20)

3・4 円弧

円の中心座標を (A, B) 曲率半径を R と表わせば

$$(x-A)^2 + (y_{\text{㉔}}-B)^2 = R^2 \quad (21)$$

一般に 3 点 (X₁, Y₁) (X₂, Y₂) (X₃, Y₃) を通る場合の解を求めると、これらを(21)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} (X_1-A)^2 + (Y_1-B)^2 &= R^2 \quad \text{①} \\ (X_2-A)^2 + (Y_2-B)^2 &= R^2 \quad \text{②} \\ (X_3-A)^2 + (Y_3-B)^2 &= R^2 \quad \text{③} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

上式は①-②及び②-③により A² と B² が消去されて A, B に関する 2 元連立方程式が得られる。これを解くことにより

$$A = \frac{(X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2)(Y_1 - Y_2) - (X_1^2 - X_3^2 + Y_1^2 - Y_3^2)(Y_1 - Y_3)}{2\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) - (X_1 - X_3)(Y_1 - Y_2)\}} \quad (23)$$

$$B = \frac{(X_1^2 - X_2^2 + Y_1^2 - Y_2^2)(X_1 - X_3) - (X_1^2 - X_3^2 + Y_1^2 - Y_3^2)(X_1 - X_2)}{2\{(Y_1 - Y_2)(X_1 - X_3) - (Y_1 - Y_3)(X_1 - X_2)\}} \quad (24)$$

なお R に関しては上式の A, B を代入して

$$R = \sqrt{(X_i - A)^2 + (Y_i - B)^2} \quad \dots\dots (i=1 \text{ or } 2 \text{ or } 3) \quad (25)$$

(23) 式に (18) 式を代入すると

$$A = \frac{\{0 - (\ell/2)^2 + 0 - \bar{\delta}^2\}(0-0) - \{0 - \ell^2 + 0 - 0\}(0 - \bar{\delta})}{2\{0 - \ell/2)(0-0) - (0-\ell)(0 - \bar{\delta})\}} = \frac{\ell}{2}$$

これはたわみ曲線の対称性からも明らかである。

(24) 式に (18) 式を代入すると

$$B = \frac{\{0 - (\ell/2)^2 + 0 - \bar{\delta}^2\}(0-\ell) - \{0 - \ell^2 + 0 - 0\}(0 - \ell/2)}{2\{(0 - \bar{\delta})(0-\ell) - (0-0)(0 - \ell/2)\}} = \frac{4\bar{\delta} - \ell^2}{8\bar{\delta}}$$

よって円弧の式は

$$\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y_{\text{㉔}} + \frac{\ell^2 - 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}}\right)^2 = R^2 \quad \text{となる。}$$

x=ℓ/2 のとき y_㉔=δ̄ であるから

$$R = \bar{\delta} + \frac{\ell^2 - 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}} = \frac{\ell^2 + 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}} \quad (25)'$$

よって (21) 式は

$$\left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(y_{\text{㉔}} + \frac{\ell^2 - 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}}\right)^2 = \left(\frac{\ell^2 + 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}}\right)^2 \quad (21)'$$

となる。故に

$$y_{\text{㉔}} = \sqrt{\left(\frac{\ell^2 + 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}}\right)^2 - \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2} - \frac{\ell^2 - 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}} \quad (26)$$

3・5 3 曲線の勾配

(ア) たわみ曲線の勾配

(19) 式を微分して

$$\frac{dy_{\text{㉑}}}{dx} = \frac{16\bar{\delta}}{5\ell} \left\{ 1 - 6\left(\frac{x}{\ell}\right) + 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right\} \quad (27)$$

(イ) 放物線の勾配

(20) 式を微分して

$$\frac{dy_{\text{㉒}}}{dx} = \frac{4\bar{\delta}}{\ell} \left\{ 1 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right) \right\} \quad (28)$$

(ウ) 円弧の勾配

(26) 式を微分して

$$\frac{dy_{\text{㉓}}}{dx} = \frac{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)}{\sqrt{\left(\frac{\ell^2 + 4\bar{\delta}^2}{8\bar{\delta}}\right)^2 - \left(x - \frac{\ell}{2}\right)^2}} \quad (29)$$

3・6 3 曲線の比較

ℓ=40m, δ̄=10cm の場合について数値計算結果を表 2 に示す。曲線グラフは 3 曲線が接近しているため省略する。表 2 を考察してみると

- ・放物線と円弧は区別できない程接近している。
- ・放物線と円弧は橋端部において勾配がきつくなる。縦距の誤差は中間で 15% 程度に対し、勾配誤差は端部で 25% あるから、近似計算の場合は橋端の勾配に留意すべきである。

・学生の設計製図等教科においては円弧定規を用いて曲線を描いても差支えない。等のことが窺える。

4. 連続梁におけるたわみ曲線の近似

話を具体化するため、2 径間連続梁に等分布荷重が満載された場合について近似性を論ずる。

表 2. 3 曲線の縦距と勾配比較

着目点 着目項		x=0	x=ℓ/10	x=ℓ/4	x=ℓ/2
		たわみ曲線 y _㉑	0	3.14 cm	7.13 cm
放物線 y _㉒	0	3.60 cm	7.50 cm	10.00 cm	
円弧 y _㉓	0	3.60 cm	7.50 cm	10.00 cm	
勾配	たわみ曲線 dy _㉑ /dx	8.0×10 ⁻³	7.5×10 ⁻³	5.5×10 ⁻³	0
	放物線 dy _㉒ /dx	10.0×10 ⁻³	8.0×10 ⁻³	5.0×10 ⁻³	0
	円弧 dy _㉓ /dx	10.0×10 ⁻³	8.0×10 ⁻³	5.0×10 ⁻³	0

橋梁たわみ曲線の考察

4・1 2 径間連続梁のたわみ曲線

図6は支間 $l_1+l_2=L$ に等分布荷重強度 q が載荷された場合を示す。連続系のたわみ(1)は支間 L 単純支持系のたわみ(2)と中間支点反力 X_A による単純支持系送たわみ(3)の重ね合せによって求められる。

ここに δ_{Am} : q による中間支点Aのたわみ

δ_{AA} : 弾性係数 (単位荷重 $P=1$ がA支点位
置に載荷されたときのA支点のたわみ)

X_A : q による中間支店反力

載荷状態(2)のたわみ曲線は(8)式より

$$y_{(2)} = \frac{qL^4}{24EI} \left\{ \left(\frac{x}{L}\right) - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 \right\} \quad (30)$$

また載荷状態(3)のたわみ曲線は(6)式より

$$\left. \begin{aligned} y_{(3)} &= \frac{X_A l_2 x}{6EIL} (L^2 - l_2^2 - x^2) \quad (0 \leq x \leq l_1) \\ y_{(3)} &= \frac{X_A}{6EIL} (l_2 x (L^2 - l_2^2 - x^2) + L(x - l_1)^3) \quad (l_1 \leq x \leq L) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

ちなみに $x=\alpha L$ とおいたときの $y_{(3)}$ と $x=(1-\alpha)L$ とおいたときの \bar{y} を $l_1=l_2=L/2$ の場合について求めてみると

$$y_{(3)} = \bar{y}_{(3)} = \frac{X_A L^3}{48EI} \alpha (3 - 4\alpha^2) \quad (32)$$

となり $y_{(3)}$ と $\bar{y}_{(3)}$ は全く左右対称な曲線となることがわかる。弾性係数 δ_{AA} は(32)式において $X_A=1, \alpha=1/2$ を代入することにより

$$\delta_{AA} = \frac{L^3}{48EI} \quad (33)$$

また荷重項 δ_{Am} は(9)式より

$$\delta_{Am} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (34)$$

このとき中間支点Aは変位ゼロであるから

$$\delta_{AA} X_A = \delta_{Am} \text{ より}$$

$$X_A = \frac{\delta_{Am}}{\delta_{AA}} = \frac{5}{8} qL \quad (35)$$

が求められる。これより連続系たわみ曲線は

$$\left. \begin{aligned} y_{(1)} &= y_{(2)} - y_{(3)} \cdots (0 \leq x \leq l_1) \\ y_{(1)} &= y_{(2)} - y_{(3)} \cdots (l_1 \leq x \leq L) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

として求めることができる。 $l_1=l_2$ のときの計算結果は文献³⁾により表3のとおりである。表3は両径間を8等分割している。例えば $x=0.25L$ 即ちPT.4に関し

$$(30) \text{ 式は } y = \frac{57}{6144} \frac{qL^4}{EI}$$

$$(32) \text{ 式は } y = \frac{55}{6144} \frac{pL^4}{EI}$$

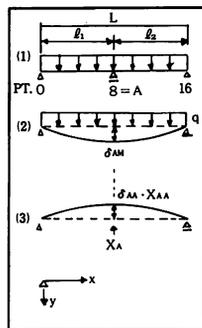


図6 2 径間連続梁のたわみ

表3. たわみ影響線 (面積値) $\times 10^{-2} \frac{qL^4}{EI}$

PT	y	たわみ	PT	y	たわみ
1		0.24923	9		0.07833
2		0.43945	10		0.24414
3		0.53406	11		0.41199
4		0.52083	12		0.52083
5		0.41199	13		0.53406
6		0.24414	14		0.43945
7		0.07833	15		0.24923
8=A		0			

$$\text{これより } y_{(1)} = y_{(2)} - y_{(3)} = \frac{2}{6144} \frac{qL^4}{EI} = 0.52083 \times 10^{-2} \frac{qL^4}{EI}$$

が得られ、表3の結果と一致する。

4・2 たわみ曲線近似の試み

まず表3の縦距値をグラフに表わすと図7のようになる。たわみ曲線は両径間での負の曲率と中間支点付近での正の曲率の3個に分れることがわかる。順次式を求めてみよう。

(ア) 左径間

PT. 1とPT. 6のたわみがほぼ等しいことに着眼し、図7の点線で示したごとく支間 $7/8 l_1$ の単純支持梁とみなし、最大距はPT. 3またはPT. 4のうち大きな方 $\bar{\delta}_1$ を $3.5/8 l_1$ ととるような放物線または円弧を近似曲線と考へてみる。(20)式において $l \rightarrow 7/8 l_1, \bar{\delta} \rightarrow \bar{\delta}_1$ とおきかえれば近似放物線 $y_{\text{㊸1}}$ は

$$y_{\text{㊸1}} = \frac{32 \bar{\delta}_1}{49} \left\{ 7 \left(\frac{x}{l_1}\right) - 8 \left(\frac{x}{l_1}\right)^2 \right\} \quad (37)$$

また(26)式も同様にして近似円弧 $y_{\text{㊸1}}$ は

$$y_{\text{㊸1}} = \sqrt{\left\{ \frac{(7/8 l_1)^2 + 4 \bar{\delta}_1^2}{8 \bar{\delta}_1} \right\}^2 - \left(x - \frac{7}{16} l_1\right)^2} - \frac{(7/8 l_1)^2 - 4 \bar{\delta}_1^2}{8 \bar{\delta}_1} \quad (38)$$

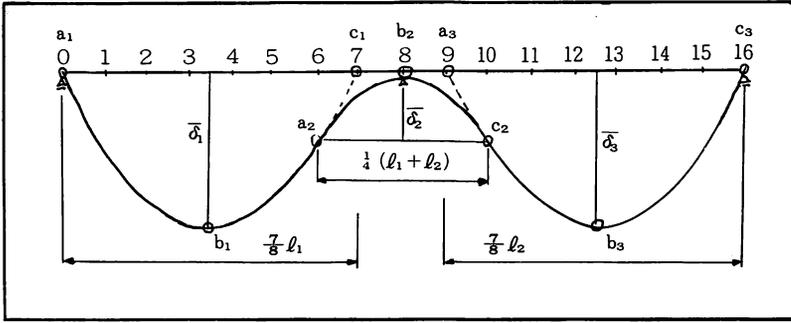


図7 2径間連続梁たわみ曲線

として得られる。表3より

$$\bar{\delta}_1 = 0.53406 \times 10^{-2} \frac{q l_1^4}{EI} \quad (39)$$

(イ) 中間支点付近

支間 l_1 と l_2 が異なる場合は左右2組の別個の近似曲線を必要とするが、簡単のため $l_1 = l_2$ とする。図7より $\bar{\delta}_2$ は P T. 6 または P T. 10 のたわみ縦距である。たわみ曲線はこのあたりが変曲点となるので、近似区間は P T. 6 ~ 10 とする。念のため図7を3分割して図8に示した。 $a_i b_i c_i$ は各近似曲線の始点、中央点、終点である。

放物線は $y = A x^2$ となるが $x = l_1 / 4$ において $y_{\text{中}} = \bar{\delta}_2$ となるから $A = 16 \bar{\delta}_2 / l_1^2$ となるので

$$y_{\text{中}} = \frac{16 \bar{\delta}_2}{l_1^2} x^2 \quad (40)$$

表3より $\bar{\delta}_2 = 0.24414 \times 10^{-2} \frac{q l_1^4}{EI}$ である。

円弧は曲率半径を R とするとき

$$x^2 + (y_{\text{中}} - R)^2 = R^2$$

となり、 $x = l_1 / 4$ のとき $y_{\text{中}} = \bar{\delta}$ であるから

$$\left(\frac{l_1}{4}\right)^2 + (\bar{\delta} - R)^2 = R^2$$

$$\text{これより } R = \frac{1}{2 \bar{\delta}_2} \left\{ \left(\frac{l_1}{4}\right)^2 + \bar{\delta}_2^2 \right\}$$

$$y_{\text{中}} = \frac{(l_1/4)^2 + \bar{\delta}_2^2}{2 \bar{\delta}_2} - \sqrt{\left\{ \frac{(l_1/4)^2 + \bar{\delta}_2^2}{2 \bar{\delta}_2} \right\}^2 - x^2} \quad (41)$$

ここに $\bar{\delta}_2$ はやはり $0.24414 \times 10^{-2} \frac{q l_1^4}{EI}$ である。

(ウ) 右径間

左径間をひっくり返して論ずればよい。

4・3 数値比較

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_1 &= 0.53406 \\ \bar{\delta}_2 &= 0.24414 \\ l_1 &= 400(\bar{\delta} \text{ の } 10^3 \text{ 倍程度}) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

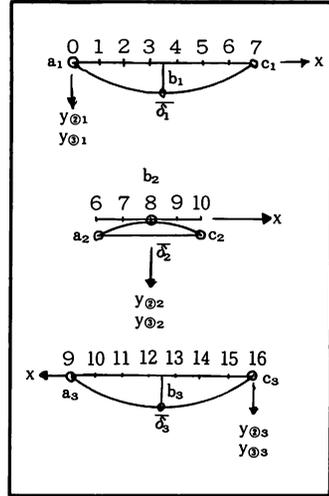


図8 3個の近似曲線

の計算結果を表4に示す。これより次のことがいえる。

- 側径間では最大たわみ値と発生個所の設定に若干の難はあるが、本法の計算結果は良好な近似性を示している。
- 中間支点付近ではチェックポイントが少なく、また側径間との変曲点の設定も強引にすぎたので、P T. 7 と 9 での誤差が22%と大きい。しかし現場技術者の目算等には十分活用できるものである。

5. 近似曲率半径の提示

近似計算のまとめとして、単純支持梁及び2径間連続梁に等分布荷重が載荷されたときのたわみ曲線の近似曲率半径を提示したい。

橋梁たわみ曲線の考察

(1) 単純支持梁

近似式は $R \gg \bar{\delta}$ および $l \gg \bar{\delta}$ を考慮している。

図3の支間 l ，最大たわみ $\bar{\delta}$ の場合 (25) 式を利用して，近似曲率半径 \bar{R}_0 は次のごとく求められる。

$$\bar{R}_0 = \frac{l^2}{8\bar{\delta}} \tag{43}$$

表4. 連続梁での計算比較

変数 PT	x	たわみ 理論値	放物線 y [ⓐ]		円弧 y [ⓑ]	
			放物線 y [ⓐ]	円弧 y [ⓑ]	放物線 y [ⓐ]	円弧 y [ⓑ]
左 径 間	1	$\frac{1}{8}l_1$	0.24923	0.26158	0.26158	
	2	$\frac{2}{8}l_1$	0.43945	0.43597	0.43597	
	3	$\frac{3}{8}l_1$	0.53406	0.52316	0.52316	
	4	$\frac{4}{8}l_1$	0.52083	0.52316	0.52316	
	5	$\frac{5}{8}l_1$	0.41199	0.43597	0.43597	
	6	$\frac{6}{8}l_1$	0.24414	0.26158	0.26158	
中 間 支 点 付 近	6	$-\frac{2}{8}l_1$	0.24414	0.24414	0.24414	
	7	$-\frac{1}{8}l_1$	0.07833	0.06104	0.06103	
	8	0	0	0	0	
	9	$\frac{1}{8}l_1$	0.07833	0.06104	0.06103	
10	$\frac{2}{8}l_1$	0.24414	0.29914	0.24414		

(2) 2 径間連続梁側径間

図7を参考に支間 l ，最大たわみ δ_1 の場合の近似曲率半径 R_1 は (43) 式で $l \rightarrow 7/8 l_1$ ， $\bar{\delta} \rightarrow \bar{\delta}_1$ とお

$$\bar{R}_1 = \frac{49l_1^2}{512\bar{\delta}_1} \tag{44}$$

(3) 2 径間連続梁中間支点付近

等径間 $l_1 = l_2$ に限る。図7を参考に (43) 式で $l \rightarrow 1/2 l_1$ ， $\bar{\delta} \rightarrow \bar{\delta}_2$ とおいて近似値 \bar{R}_2 は

$$\bar{R}_2 = \frac{l_1^2}{32\bar{\delta}_2} \tag{45}$$

以上曲率半径は支間と最大たわみの2個の変数によって簡単な近似式となることがわかった。

6. 有効数字けた落ちの留意事項提示

円弧の近似式 (26) (38) (41) は数式どおりに計算すると非常に接近した2個の数値 ($F + \epsilon_1$) と ($F - \epsilon_2$) の差を求めることになり，本文の場合有効数字の上4けたが相殺されるので，結果の信頼性が望ましくないことになる。通常これを「けた落ち」と呼んでいる。このような現象はほぼ直角に近い斜橋や曲率半径が非常に大きな曲線橋の数値計算に出

現する。けた落ちを防ぐ手段は3通りある。即ち

(1) 計算機の有効数字を2倍にする

$$(2) \sqrt{F+\epsilon_1} - \sqrt{F-\epsilon_2} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{F+\epsilon_1} + \sqrt{F-\epsilon_1}} \doteq \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\sqrt{F}} \tag{46}$$

を利用する。

$$(3) \text{級数展開例えば } \theta - \sin \theta = \frac{\theta^3}{3!} \tag{47}$$

を利用する

似かよった θ と $\sin \theta$ を計算しその差を求めると大幅なけた落ちを生ずる。そのことと，はじめから $\theta^3/3!$ を計算し有効数字の頭から信頼できることは根本的な意味の違いがある。学生も技術者もけた落ちについて十分注意を払う必要がある。

本文では (46) 式を利用すると (26) 式は

$$y^{\text{ⓐ}} \doteq \bar{\delta} - 4\bar{\delta} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2} \right)^2 \tag{48}$$

となる。 $x/l = 0, 0.1, 0.25$ 等を代入すれば，計算は著しく簡易になる。また (38) 式は $\bar{\delta} \rightarrow \bar{\delta}_1$ ， $l \rightarrow 7/8 l_1$ とおいて (48) 式を変形すると

$$y^{\text{ⓐ}1} \doteq \bar{\delta}_1 - \frac{256\bar{\delta}_1}{49} \left(\frac{x}{l_1} - \frac{7}{16} \right)^2 \tag{49}$$

これに $x/l = 0, 1/8, 2/8$ 等代入すればよい。

(41) 式も全く同様に近似できる。

7. 結 語

橋梁たわみ曲線を橋端の外で論ずることは，工学的には全く無意味であり，無駄なことである。しかし地球の土木工学を時には宇宙の遠くから眺めて論ずることが必要のごとく，時にはたわみ曲線を純粋数学のグラフとして遊んでみることも一興と思う。特に学生の自由研究テーマに適しており，本文では各数式を学生向きに少し詳しく解説した。冗長のおそれあらばお詫びしたい。

次にたわみ曲線を放物線や円弧で近似する方法は，橋梁の製作キャンパの計算や，設計製図における作図作業等に利用されている。また現場技術者や日常会議の席上で，とっさの場合の近似計算としては精度が十分信頼できると申し上げたい。

最後に昨今のコンピュータ万能時代を迎えるに当たり有効数字のけた落ちについて注意をうながした。

参考文献

- 1) 大地羊三他 わかり易い土木講座1 数学 彰国社 1986. 4. P. 107

- 2) 宮原・高端 新編土工学講座 9 構造力学(1)
コロナ社 1987. 3. P.142, 143, 148, 149
- 3) 渡辺 昇 連続けた影響線の縦距表と面積表
技報堂 1968. P.9