

# 部分空洞水中翼の特性解析

伊藤 惇・斎藤 輝雄・遠藤 正彦\*

## Characteristics of Partially Cavitating Submerged Hydrofoil

Jun Ito

(昭和 63 年 10 月 31 日受理)

For the partially cavitating submerged hydrofoil, the perturbed velocity field is described by vortex and source and reduced to simultaneous integral equation, which is further reduced to algebraic equation to find solution. Expression to cavity and hydrofoil characteristics are given and the various concrete calculation are performed. The effects of submergency depth, cavity length and cavity models on cavitation number, lift coefficients, drag coefficients, cavity form and pressure distribution are clarified.

### 1. はじめに

部分空洞翼に関する研究の中で、水面の影響を考慮した解析は未だ見知していない。本研究は西山ら<sup>(1)</sup>による解析法を自由境界のある問題に拡張し、水面からの深さが部分空洞翼特性にどのような影響を与えるかを明らかにしたものである。

解法の手順は、(1)鏡像の原理を用いて水面の影響を考慮し、翼型と空洞は渦と吹き出し分布で代表させ、これによるじょう乱の速度場を求める。(2)空洞部分の圧力一定条件と空洞のない翼面上の接線流れの条件から連立積分方程式を誘導する。(3)この積分方程式の解法としては、渦、吹き出し分布を級数展開し、連立一次代数方程式に帰着させる。(4)翼形および空洞特性の表示式を誘導し、数値計算によってこれら諸特性を明らかにする。

### 2. 基礎式

#### 2・1 積分方程式

図 1 に示すように、水面に x 軸、これに垂直に y 軸をとり、没さ f なる位置に部分空洞翼があるものとする。翼形前縁より空洞後端までと、空洞後端より翼形後縁までの翼形上下面の圧力不連続量を渦分布  $\gamma_1(x)$ ,  $\gamma_2(x)$ , 空洞の厚み、翼厚を吹き出し分布  $m_c(x)$ ,  $m_0(x)$  で表わすものとする。線形理論の仮

定より、これらの特異点分布を  $y=-f$  に分布させる。

部分空洞翼は、一般に流速が大で、慣性力は重力に比で圧倒的に大きく、したがって重力波動は無視して取り扱うことができる。このように水面は水平であると考えられることから、鏡像をとることができ、x, y 方向のじょう乱速度 u, w は次のようになる。

$$u_1(x, -f \pm 0) = \pm \frac{1}{2} \gamma_1(x) + u_0(x) \quad (1)$$

$$w_1(x, -f \pm 0) = \pm \frac{1}{2} \{m_c(x) + m_0(x)\} + w_0(x) \quad (2)$$

$$u_2(x, -f \pm 0) = \pm \frac{1}{2} \gamma_2(x) + u_0(x) \quad (3)$$

$$w_2(x, -f \pm 0) = \pm \frac{1}{2} m_0(x) + w_0(x) \quad (4)$$

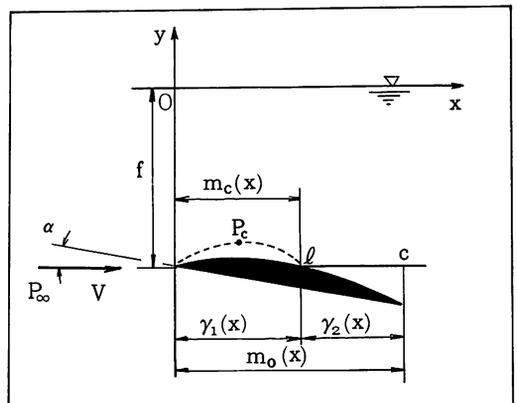


図 1 座標

\* 本荘由利市町村圏組合

ここでサフィックス 1, 2 は  $0 < x < 1, 1 < x < c$  の変域に対応させるものとする。また  $u_0(x), w_0(x)$  は、

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 r_1(\xi) + \int_1^c r_2(\xi) \right\} \frac{-2f}{(x-\xi)^2 + 4f^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 m_c(\xi) + \int_0^c m_0(\xi) \right\} \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 m_c(\xi) + \int_0^c m_0(\xi) \right\} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + 4f^2} d\xi \quad (5)$$

$$w_0(x) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 r_1(\xi) + \int_1^c r_2(\xi) \right\} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + 4f^2} d\xi - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^c r_1(\xi) + \int_1^c r_2(\xi) \right\} \frac{d\xi}{x-\xi} - \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^1 m_c(\xi) + \int_0^c m_0(\xi) \right\} \frac{-2f}{(x-\xi)^2 + 4f^2} d\xi \quad (6)$$

キャピテーション係数を  $\sigma$ 、無限上流の圧力と速度を  $P_\infty, V$ 、翼下面、反り線、翼厚分布を  $y_e, y_s, y_o$  とすると、空洞部分の圧力一定条件と、翼下面、反り線の接線流れの条件はそれぞれ次のようになる。

$$\sigma = \frac{2u_1(x, -f+0)}{V}; \sigma = \frac{P_\infty - P_c}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad (0 < x < 1, y = -f+0) \quad (7)$$

$$\frac{dy_1}{dx} - \alpha = \frac{w_1(x, -f+0)}{V}, \quad (0 < x < 1, y = -f-0) \quad (8)$$

$$\frac{dy_s}{dx} - \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{w_2(x, -f+0)}{V} + \frac{w_2(x, -f-0)}{V} \right) \quad (1 < x < c) \quad (9)$$

また、翼厚分布と吹き出し分布の関係は

$$\frac{dy_o(x)}{dx} = \frac{m_o(x)}{V} \quad (10)$$

(7), (8), (9) 式に (1) ~ (6), (10) 式を代入して得られる方程式は、 $r_1(x), r_2(x), m_c(x)$  を未知関数とする連立の積分方程式であり、部分空洞水中翼の流れ場を支配する基礎方程式となる。

### 2・2 解法

未知関数  $r_1(x), r_2(x), m_c(x)$  を次のように展開する。

$$r_1(x) = V \left( a_{-1} + a_n \sqrt{\frac{1-\sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\phi \right), \quad x = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi) \quad (11)$$

$$r_2(x) = V \left( b_{-1} \frac{1-\cos \epsilon}{2} + \lambda b_0 \cot \frac{\epsilon}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\epsilon \right), \quad x = \frac{c-1}{2} (1 - \cos \epsilon) + 1 \quad (12)$$

$$m_c(x) = V \left( C_{-1} \sqrt{\frac{1-\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} + \lambda C_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} C_p \sin p\theta \right), \quad x = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (13)$$

$$C_p \sin p\theta), \quad x = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \quad (13)$$

ここで  $\lambda$  は、空洞の後端の流れ模型が、閉鎖形・半閉鎖形では 1、開放形模型では 0 なる値をとるものとする。翼厚勾配は

$$\frac{dy_o}{dx} = d_0 + \sum_{q=1}^{\infty} d_q \cos q\omega, \quad x = \frac{c}{2} (1 + \cos \omega) \quad (14)$$

と展開する。

空洞後端においては流れ模型を設定して解かなければならない。空洞後端の開き幅を  $\delta$  とすると、閉鎖形模型では

$$\int_0^1 \frac{m_c(x)}{V} dx = 0, \quad \frac{C_{-1}}{2} + C_0 + \frac{C_1}{2} = 0 \quad (15)$$

半閉鎖形模型では

$$\int_0^1 \frac{m_c(x)}{V} dx = \delta, \quad \frac{C_{-1}}{2} + C_0 + \frac{C_1}{2} = \frac{2\delta}{\pi l} \quad (16)$$

開放形模型では

$$r_1(1) = r_2(1), \quad a_{-1} = b_{-1} \quad (17)$$

標点の座標は次のとおりである。

式(7)に対しては、

$$x_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{\pi}{2L} (2i-1) \right\} \right], \quad i=1, 2, \dots, L \quad (18)$$

式(8)に対しては、

$$x_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{\pi}{2M} (2i-1) \right\} \right], \quad i=1, 2, \dots, M \quad (19)$$

式(9)に対しては、

$$x_i = \frac{c-1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \pi - \frac{\pi}{2N} (2i-1) \right\} \right] + 1, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (20)$$

標点数  $L, M, N$  については、渦分布の級数の正弦部分の 2 項、吹き出し分布については同じく 3 項までとる Schlichting の方法と合わせることににより標点の総数を定め、各境界に対する振り分けは試行錯誤により最も精度のよいものを選んだ。その結果閉鎖形、半閉鎖形模型では  $L=6, M=3, N=4$ 、開放形模型では  $L=6, M=3, N=3$  とした。

## 3. 翼形特性

### 3・1 圧力係数

ベルヌーイの定理より圧力係数は

$$C_p(x, -f \pm 0) = -\frac{2u(x, -f \pm 0)}{V} \quad (21)$$

$0 < x < 1$  および  $1 < x < c$  における圧力係数を  $C_{p1}, C_{p2}$  とすると

$$\left. \begin{aligned} C_{p1}(x, -f \pm 0) &= \mp A + E + F \\ C_{p2}(x, -f \pm 0) &= \mp B + E + F \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

部分空洞水中翼の特性解析

となり、ここに、

$$A = \frac{r_1(x)}{V}, B = \frac{r_2(x)}{V}, \quad (23, 24)$$

$$E = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{m_c(\xi)}{V} \frac{1}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{m_o(\xi)}{V} \frac{1}{x-\xi} d\xi \quad (25)$$

$$F = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{r_1(\xi)}{V} \frac{-2f}{(x-\xi)^2+4f^2} d\xi - \frac{1}{\pi} \int_1^c \frac{r_2(\xi)}{V} \times \frac{-2f}{(x-\xi)^2+4f^2} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{m_c(\xi)}{V} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+4f^2} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{m_o(\xi)}{V} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+4f^2} d\xi \quad (26)$$

である。積分を実行すると次のようになる。

$$\begin{aligned} C_{p1}(x, -f \pm 0) &= a_{-1} \{ \pm 1 - 2J(s, a_{m1}) \} + a_o \\ &\times \left\{ \pm \sqrt{\frac{1-\sin\phi/2}{\sin\phi/2}} - 2J(s, a_o) \right\} + \frac{n}{1} a_n \left\{ \pm \sin n\phi - J(s, a_1) \right\} - 2b_{-1} J(s, b_{m1}) - 2\lambda b_o J(s, b_o) - 2\sum_1^m b_m \\ &\times J(s, b_m) + C_{-1} \left\{ \left( \sqrt{\frac{\cos\theta/2+1}{\cos\theta/2}} - 2 \right) + 2J(t, C_{m1}) \right\} \\ &+ \lambda C_o \left\{ 1 + 2J(t, C_o) \right\} - \frac{q}{1} C_p \left\{ \cos p\theta - 2J(t, C_p) \right\} \\ &+ d_o \left\{ -\frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega} \right) + 2J(t, d_o) \right\} + \sum_1^q d_q \left\{ -\frac{1}{\pi} \times F(q, \cos\omega) + 2J(t, d_q) \right\} \quad (27) \\ C_{p2}(x, -f \pm 0) &= -2a_{-1} J(s, a_{m1}) - 2a_o J(s, a_o) - 2\sum_1^n a_n J(s, a_n) + b_{-1} \left\{ \pm \frac{1}{2} (1+\cos\xi) - 2J(s, b_{m1}) \right\} + \lambda b_o \\ &\times \left\{ \pm \cos \frac{\xi}{2} - 2J(s, b_o) \right\} + \sum_1^m b_m \left\{ \pm \sin m\xi - 2J(s, b_m) \right\} \\ &+ C_{-1} \left\{ \sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}} + \sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}} - 2 + 2J(t, c_{m1}) \right\} + \\ &+ \lambda C_o \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu-1}} + 2J(t, c_o) \right\} + \sum_1^p C_p \left\{ -(\nu \right. \\ &\left. - \sqrt{\nu^2-1})^p + 2J(t, C_p) \right\} + d_o \left\{ -\frac{1}{\pi} \log \left( \frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega} \right) \right. \\ &\left. + 2J(t, d_o) \right\} + \sum_1^q d_q \left\{ -\frac{1}{\pi} F(q, \cos\omega) + 2J(t, d_q) \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

3・2 揚力係数

揚力は、

$$L = \oint p(x, o) \cos(x, s) ds = \oint p(x, o) dx \quad (29)$$

よって揚力係数は次のようになる。

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \oint \frac{p(x, -f) - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} dx = \frac{1}{c} \oint C_p(x, -f) dx \\ &= \frac{1}{c} \left[ \int_0^1 C_{p1}(x, -f-o) dx - \int_0^1 C_{p1}(x, -f+o) dx \right. \\ &\left. + \int_1^c C_{p2}(x, -f-o) dx - \int_1^c C_{p2}(x, -f+o) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c} \left[ \int_0^1 \left\{ C_{p1}(x, -f-o) - C_{p1}(x, -f+o) \right\} dx \right. \\ &\left. + \int_1^c \left\{ C_{p2}(x, -f-o) - C_{p2}(x, -f+o) \right\} dx \right] \quad (30) \end{aligned}$$

式(30)に式(25~28)を代入すると、

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{1}{c} \left[ \int_0^1 2A dx + \int_1^c 2B dx \right] \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{c} \left( 2 \frac{a_{-1}}{2} + \frac{a_o}{2} + \frac{a_1}{2} \right) + \frac{c-1}{c} \left( \frac{b_{-1}}{2} + \lambda b_o + \frac{b_1}{2} \right) \right\} \quad (31) \end{aligned}$$

3・3 抗力係数

抗力は、

$$D = \oint p(x, o) \sin(x, s) ds = \oint p(x, o) dy \quad (32)$$

よって抗力係数は、

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} = \oint \frac{p(x, -f) - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V^2 c} dy \\ &= \frac{1}{c} \oint C_p(x, -f) dy \quad (33) \end{aligned}$$

翼上面下面では

$$y = y_U - \alpha x, y = y_L - \alpha x \quad (34, 35)$$

とすると

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{1}{c} \int_0^1 \left[ C_{p1}(x, -f+o) \left( \frac{dy_U}{dx} - \alpha \right) - C_{p1}(x, -f-o) \right. \\ &\times \left. \left( \frac{dy_L}{dx} - \alpha \right) \right] dx + \frac{1}{c} \int_1^c \left[ C_{p2}(x, -f+o) \left( \frac{dy_U}{dx} - \alpha \right) \right. \\ &\left. - C_{p2}(x, -f-o) \left( \frac{dy_L}{dx} - \alpha \right) \right] dx \quad (36) \end{aligned}$$

式(36)に式(25~28)を代入すると、

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{1}{c} \int_0^1 \left[ -2A \left( \frac{dy_s}{dx} - \alpha \right) + (E+F) \frac{dy_o}{dx} \right] dx \\ &+ \int_1^c \left[ -2B \left( \frac{dy_s}{dx} - \alpha \right) + (E+F) \frac{dy_o}{dx} \right] dx \\ &= -\frac{2}{c} \int_0^1 A \frac{dy_s'}{dx} dx + \frac{1}{c} \int_0^1 (E+F) \frac{dy_o}{dx} dx \\ &\quad - \frac{2}{c} \int_1^c B \frac{dy_s'}{dx} dx + \frac{1}{c} \int_1^c (E+F) \frac{dy_o}{dx} dx \quad (37) \end{aligned}$$

ここに、

$$y_s' = y_s - \alpha x, y_s = \frac{1}{2} (y_U + y_L), y_o = y_U - y_L \quad (38 \sim 40)$$

である。積分を実行すると、

$$\begin{aligned} C_D &= a_{-1} I_{a_{m1}} + a_o I_{a_o} + \sum_1^n a_n I_{a_n} + b_{-1} I_{b_{m1}} \\ &+ \lambda b_o I_{b_o} + \sum_1^m b_m I_{b_m} + C_{-1} I_{c_{m1}} + C_o \lambda I_{c_o} \\ &+ \sum_1^p C_p I_{c_p} + d_o I_{d_o} + \sum_1^q d_q I_{d_q} + \frac{1}{c} \int_0^1 F \frac{dy_o}{dx} dy_o \\ &+ \frac{1}{c} \int_1^c F \frac{dy_o}{dx} dx \quad (41) \end{aligned}$$

3・4 自由流線形状

空洞厚み分布 $y_t$ は次式より得られる。

$$\frac{y_t(x)}{1} = \frac{1}{1} \int_0^x \frac{m_c(x)}{V} dx \quad (42)$$

積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \frac{y_t(\theta)}{1} = & C_{-1} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos(\theta/2)(1-\cos(\theta/2))} (2\cos(\theta/2) \right. \\ & \left. - 1) - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{1-\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}} \right) \right\} + \lambda C_o \left\{ -\frac{1}{2} \sin \theta \right. \\ & \left. + \sin^{-1} \left( \cos \frac{\theta}{2} \right) \right\} + \frac{1}{4} C_1 \left( \pi + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta \right) + \frac{1}{4} \Sigma C_p \\ & \times \left[ \frac{\sin((p+1)\theta)}{p+1} - \frac{\sin((p-1)\theta)}{p-1} \right] \quad (43) \end{aligned}$$

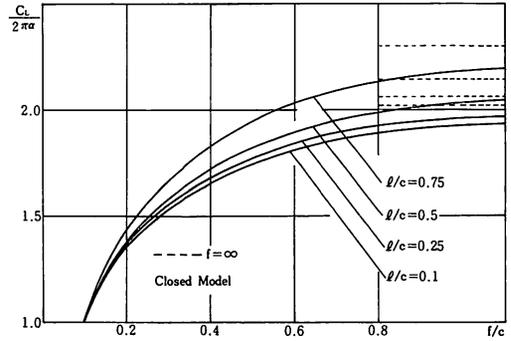


図4 揚力係数と没水深さの関係 (空洞長さを変えた場合)

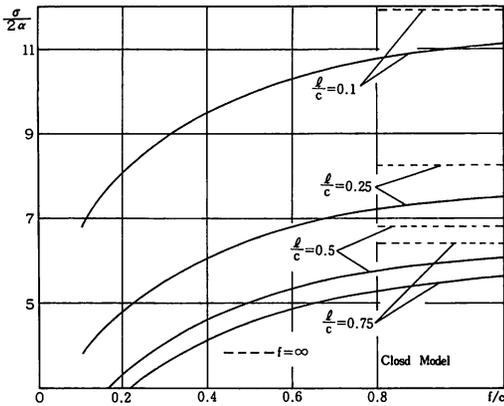


図2 キャビテーション係数と没水深さの関係 (空洞長さを変えた場合)

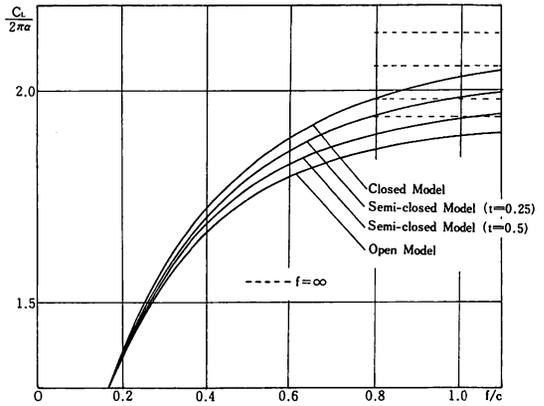


図5 揚力係数と没水深さの関係 (空洞模型を変えた場合)

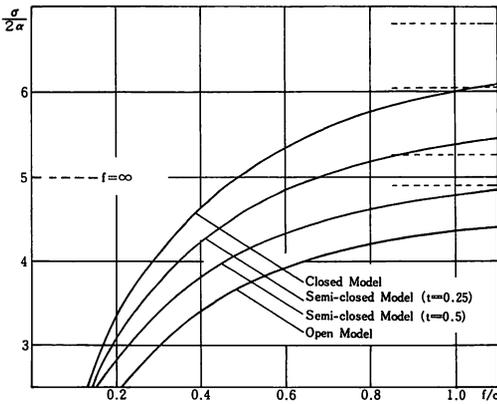


図3 キャビテーション係数と空洞長さの関係 (空洞模型を変えた場合)

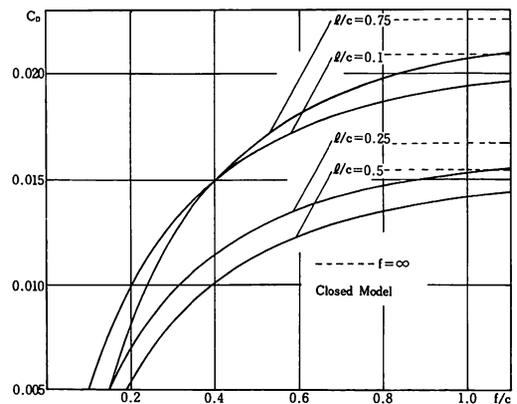


図6 抗力係数と没水深さの関係 (空洞長さを変えた場合)

部分空洞水中翼の特性解析

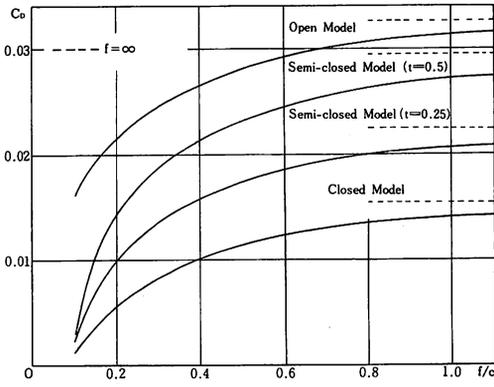


図7 抗力係数と没水深さの関係 (空洞模型を変えた場合)

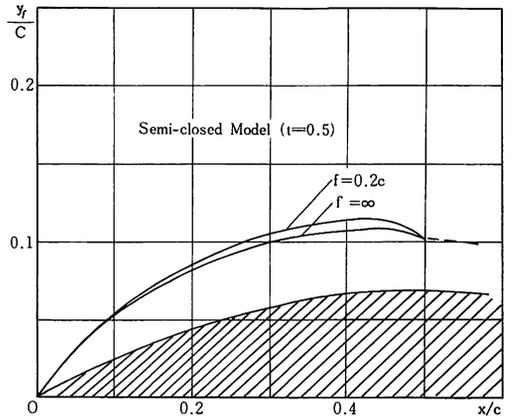


図10 自由流線形状 (半閉鎖形模型 (t=0.5))

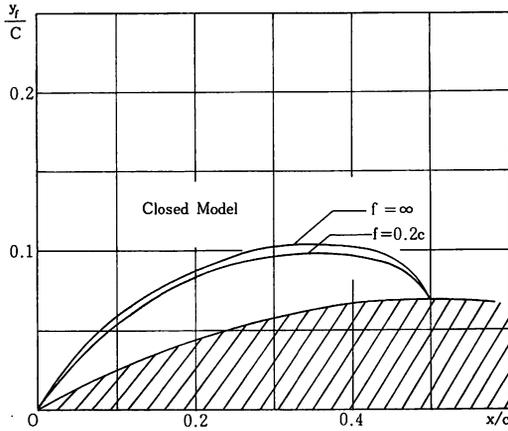


図8 自由流線形状 (閉鎖形模型)

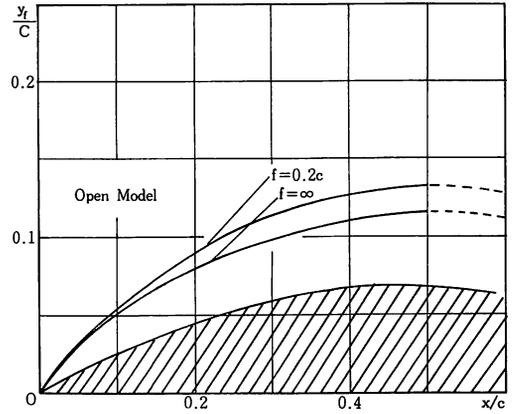


図11 自由流線形状 (開放形模型)

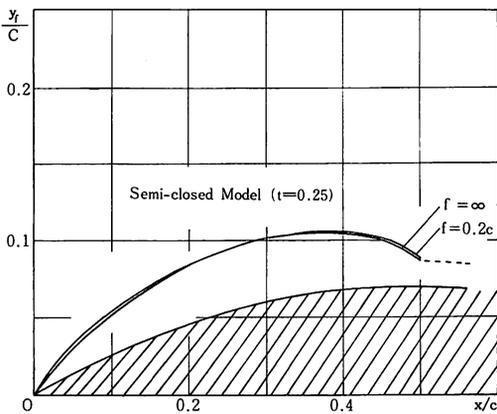


図9 自由流線形状 (半閉鎖形模型 (t=0.25))

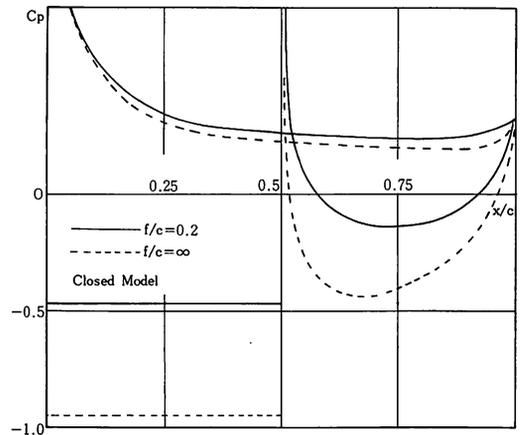


図12 圧力分布 (閉鎖形模型)

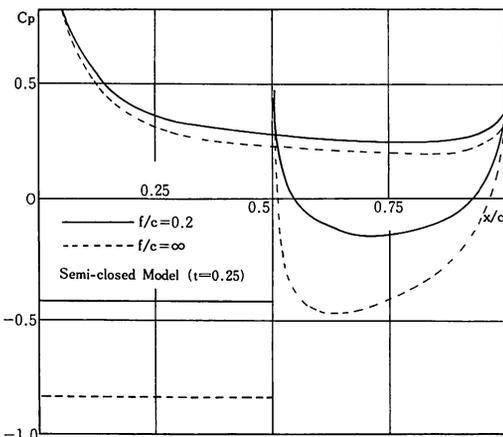


図13 圧力分布 (半閉鎖形模型 (t=0.25))

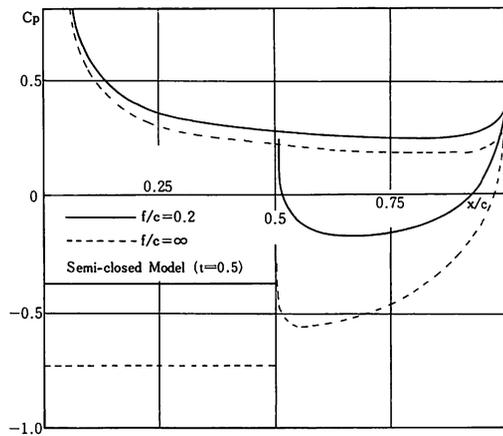


図14 圧力分布 (半閉鎖形模型 (t=0.5))

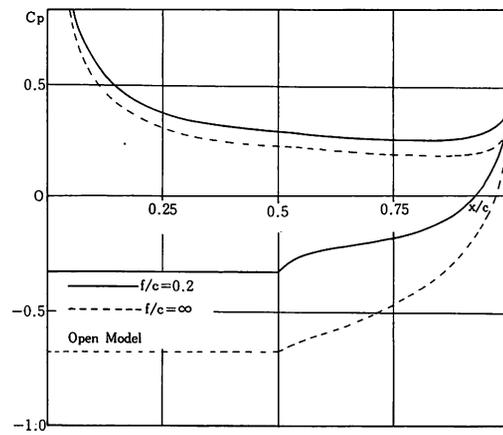


図15 圧力分布 (開放形模型)

よって、自由流線形状  $y_f$  は次式によって与えられる。

$$y_f(\theta) = y_t(\theta) + \frac{y_o(\theta)}{2} - \frac{\alpha}{2} 1(1 + \cos\theta) \quad (44)$$

#### 4. 数値計算例

図2は空洞長さによる没水深さとキャビテーション係数の関係を示したものである。没水深さが小さい程キャビテーション係数は小さい。つまり翼が自由表面に近づくにつれて空洞内の圧力は大気圧に近づくということである。また空洞長さが短いほど、没水深さの変化によるキャビテーション係数の変化が著しい。

図3は模型による没水深さとキャビテーション係数の関係を示したものである。開き幅が小さい程、つまり閉鎖形模型の時が最も没水深さによるキャビテーション係数の変化の割合が大きい。

図4は空洞長さによる没水深さと揚力係数の関係を示したものである。没水深さが小さい程揚力係数は小さくなる。また空洞長さが長い程没水深さによる揚力係数の変化の割合が大きい。

図5は模型による没水深さと揚力係数の関係を示したものである。揚力係数は閉鎖形模型の方が大きく現われ、キャビテーション係数と同様に、閉鎖形模型の時が最も没水深さによる揚力係数の変化の割合が大きい。

図6は空洞長さによる没水深さと抗力係数の関係を示したものである。没水深さが小さい程抗力係数は小さい。

図7は模型による没水深さと抗力係数の関係を示したものである。抗力係数は開放形模型の方が大きい。没水深さが小さい程抗力係数は小さい。

図8, 図9, 図10, 図11は模型および没水深さによる自由流線形状を示したものである。閉鎖形模型においては没水深さが大きい程自由流線形状はふくれるが、逆に開放形模型においては没水深さが小さい程ふくれる。半閉鎖形模型では没水深さによって自由流線形状はほとんど変化しない。

図12, 図13, 図14, 図15は模型および没水深さによる圧力分布を示したものである。いずれの模型に関しても没水深さの変化に対しては翼正面の圧力分布より翼背面の圧力分布の方が変化が激しい。半閉鎖形模型で開き幅の大きい程空洞後端から翼後縁の範囲で、翼背面の圧力の最小の生ずる点は空洞後端の方に近づく。開放形模型においては連続的に変化する。

部分空洞水中翼の特性解析

5. 結 言

部分空洞水中翼の翼形特性を求めるため、特異点法を用い、水面の影響として鏡像の原理を用いて水面の境界条件を満足させた。

解析の手順は次のようにした。

- (1) 翼形と空洞と自由表面を考慮したじょう乱速度場を求める。
- (2) 接線流れの条件と空洞部分における圧力一定条件から連立積分方程式を誘導する。
- (3) 流れ場の線形化により、特異性と収束性を考慮した級数表示を行う。
- (4) 空洞後端模型を導入しつつ適当な標点位置をとることにより連立代数方程式を解く問題に帰着させる。

以上の解法を任意翼形について示したが、ここでは欠円翼を用いて、種々の特性計算を行い水面からの深さの変化が翼形特性および空洞特性にどのような影響を与えるかを明らかにした。

6. 参考文献

- (1) 西山・伊藤, 日本機械学会論文集, 48巻, 370号, 昭52~6, PP.2165-2174

7. 付 録

$$S(\xi) = \frac{-2f}{(x-\xi)^2 + 4f^2}, \quad T(\xi) = \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + 4f^2}$$

$$J(s, a_{m1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 S(\xi) d\xi$$

$$J(s, a_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sin\phi/2}{\sin\phi/2}} S(\xi) d\xi$$

$$J(s, a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin\phi S(\xi) d\xi$$

$$J(t, a_{m1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 T(\xi) d\xi$$

$$J(t, a_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sin\phi/2}{\sin\phi/2}} T(\xi) d\xi$$

$$J(t, a_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin\phi T(\xi) d\xi$$

$$J(s, b_{m1}) = \frac{1}{2\pi} \int_1^c \frac{1}{2} (1+\cos\epsilon) S(\xi) d\xi$$

$$J(s, b_o) = \frac{1}{2\pi} \int_1^c \cot\frac{\epsilon}{2} S(\xi) d\xi$$

$$J(s, b_m) = \frac{1}{2\pi} \int_1^c \sin\epsilon S(\xi) d\xi$$

$$J(t, b_{m1}) = \frac{1}{2\pi} \int_1^c \frac{1}{2} (1+\cos\epsilon) T(\xi) d\xi$$

$$J(t, b_o) = \frac{1}{2\pi} \int_1^c \cot\frac{\epsilon}{2} T(\xi) d\xi$$

$$J(t, b_m) = \frac{1}{2\pi} \int_1^c \sin\epsilon T(\xi) d\xi$$

$$J(s, c_{m1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta/2}{\cos\vartheta/2}} S(\xi) d\xi$$

$$J(s, c_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \cot\frac{\vartheta}{2} S(\xi) d\xi$$

$$J(s, c_p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin\vartheta S(\xi) d\xi$$

$$J(t, c_{m1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta/2}{\cos\vartheta/2}} T(\xi) d\xi$$

$$J(t, c_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \cot\frac{\vartheta}{2} T(\xi) d\xi$$

$$J(t, c_p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin\vartheta T(\xi) d\xi$$

$$J(s, d_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c S(\xi) d\xi$$

$$J(s, d_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \cos\varrho \omega S(\xi) d\xi$$

$$J(t, d_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c T(\xi) d\xi$$

$$J(t, d_q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \cos\omega T(\xi) d\xi$$

$$I_{am1} = -\frac{2}{c} \{y_s(1) - \alpha 1\}$$

$$I_{ao} = -\frac{2}{c} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\sin\phi/2}{\sin\phi/2}} dy'_s$$

$$I_{an} = -\frac{2}{c} \int_0^1 \sin\phi dy'_s, \quad I_{bm1} = -\frac{1}{c} \int_1^c (1+\cos) dy'_s$$

$$I_{bo} = -\frac{2}{c} \int_1^c \cot\frac{\epsilon}{2} dy'_s, \quad I_{bp} = -\frac{2}{c} \int_1^c \sin\epsilon dy'_s$$

$$I_{cm1} = -\frac{1}{c} \int_0^1 \left( 2 - \sqrt{\frac{\cos\theta/2+1}{\cos\theta/2}} \right) dy_o - \frac{1}{c} \int_1^c \left( 2 - \sqrt{1 - \frac{2}{1+\nu}} - \sqrt{1 + \frac{2}{1+\nu}} \right) dy_o$$

$$I_{co} = \frac{1}{c} y_o(1) - \frac{1}{c} \int_1^c \left( \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu-1}} - 1 \right) dy_o$$

$$I_{cp} = -\frac{1}{c} \int_0^1 \cos\theta dy_o - \frac{1}{c} \int_1^c \left( \nu - \sqrt{\nu^2-1} \right)^p dy_o$$

$$I_{bo} = -\frac{1}{c\pi} \int_0^c \log\left(\frac{1+\cos\omega}{1-\cos\omega}\right) dy_o$$

$$I_{dq} = -\frac{1}{c\pi} \int_0^c F(q, \cos\omega) dy_o$$