

平行壁間にまたがる平板まわりの流れの解析法

伊藤 惇

Analytical Method for Three Dimensional Flat Plate Spanning Two Parallel Plane Walls

Jun Ito

(昭和 63 年 10 月 31 日受理)

An analytical method of a flat plate characteristics in a shear flow between parallel walls is developed. These kind of studies are very important for the blade characteristic analysis and the blade design of the axial flow type fluid machinery. The existing theory by Honda has the mathematical difficulties and is not suitable for extension to various engineering applications, in particular, such complex problems as the mixed boundary value problems, the time dependency problems and so on. In this paper, from such points of view, a concise method for the analysis of a flat plate in a shear flow between parallel walls has been proposed.

1. はじめに

平行壁間の剪断流中の翼理論は、軸流型の流体機械における静翼や動翼の流体力特性や流動特性を解析したり、これらの翼設計に資料を提供する上で特に重要である。この種の既存研究には本田によるもの⁽¹⁾があるが、これは数学的に厳密であり理論として優れている。一方、工学的応用という観点からは、数学的厳密さよりも、理論やその解析法を容易に把握できて、取り扱いが簡便であるということもまた重要な因子である。見通しのよい簡便解法は、例えば混合境界値問題^(2,3,4)や時間依存性のある問題などもっと高度で複雑な一般性のある問題に拡張できる。

以上のような背景から本研究は、本田により誘導された基礎方程式を、モード・ファンクション法によって解析する一解法を提案する。

2. 基礎式

図 1 に示すように、幅 λ の平行壁間に、長さ c なる平板が、平行壁に垂直でかつ x, y 平面に α なる仰角で配置されている。板幅方向に速度分布の変化する剪断流 $U(y)$ が無限前方から x, y 平面に平行に、 x 軸方向に流れて板をよぎるものとする。また、流れは非圧縮、非粘性を仮定する。オイラー

の運動方程式と連続の方程式から、じょう乱圧力 p に関して次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + U^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{U^2} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

境界条件としては、無限遠では、じょう乱圧力 p は零であることから

$$p = 0 ; z^2 + x^2 = \infty \quad (2)$$

平行壁の壁面では、壁面に垂直な圧力勾配は零であることから

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 ; y = 0, \lambda \quad (3)$$

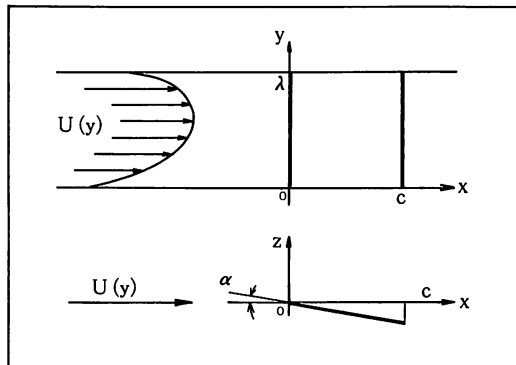


図 1 流れの座標系

板上では、接線流れの条件から

$$\frac{w(x,y,0)}{U(y)} = \frac{d}{dx} f_c(x); \quad 0 < x < c, \quad 0 < y < \lambda \quad (4)$$

が成立する。ここで f_c は板表面上の z 座標である。基本解として次のような変数分離解

$$\frac{p}{\rho} = Y(y) P(x,z) \quad (5)$$

を仮定すると、一般解は

$$\frac{p}{\rho} = \sum_k F(k) Y(y;k) P(x,z;k) \quad (6)$$

より求めることができる。ここで k は分離定数である。式(7,8)のような速度分布に対しては、 $Y(y;k)$, $F(k)$ は各々式(9,10,11)のようになる。

$$U(y) = U_0 + \frac{U_1 - U_0}{y_e} y \quad (0 < y < y_e) \quad (7)$$

$$U(y) = U_1 = \text{一定} \quad (y_e < y < \frac{1}{2}\lambda) \quad (8)$$

$$Y(y;k) = \frac{1}{D_0} \left\{ U \cos(ky) - \frac{U_1 - U_0}{ky_e} \sin(ky) \right\} \quad (0 < y < y_e) \quad (9)$$

$$Y(y;k) = \frac{1}{D_1} U_1 \cos\left(k\left(\frac{1}{2}\lambda - y\right)\right) \quad (y_e < y < \frac{1}{2}\lambda) \quad (10)$$

$$\frac{F(k)}{U_1} = -\frac{2}{D_0} \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{k^* \eta_e} \{1 - \cos(k^* \eta_e)\} \quad (11)$$

ここで $\eta_e = 2y_e/\lambda$, $k^* = k\lambda/2$ 。また、固有値 k , 定数 D_0 , D_1 はそれぞれ次式から決定される。

$$\sin k^* = \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{k^* \eta_e} \sin(k^* \eta_e) \sin\{k^*(1 - \eta_e)\} \quad (12)$$

$$\frac{D_0}{D_1} = \cos k^* - \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{k^* \eta_e} \sin(k^* \eta_e) \cos\{k^*(1 - \eta_e)\} \quad (13)$$

$$2D_0^2 = \eta_e + \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 (1 - \eta_e) + \frac{1}{2k^*} [\sin(2k^* \eta_e) + \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 \sin\{k^*(1 - \eta_e)\}] - \frac{U_1 - U_0}{U_1} \frac{1}{k^* \eta_e} \{1 - \cos(2k^* \eta_e)\} \quad (14)$$

さて式(6)における $P(x,z;k)$ に関しては、次の積分方程式が成立する。

$$\frac{d}{dx} f_c(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c h(x-\xi;k) \{P(x,-0;k) - P(x,+0;k)\} d\xi \quad (15)$$

ここで $h(x-\xi;k)$ は次式により与えられる。

$$h(x-\xi;k) = \frac{1}{2} \pi k + k \operatorname{sgn}(x-\xi) \{K_1(k|x-\xi|) + \int_0^{k|x-\xi|} K_0(t) dt\} \quad (16)$$

ここで K_1 , K_0 は第1次, 第0次の第2種変形ベッセル関数である。

3. 解法

式(15)を解くために次のような級数展開を行う。

$$\Delta P(x,0;k) = A_0(k) \cot \frac{\phi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k) \sin n\phi, \quad x = \frac{c}{2} \times (1 - \cos \phi) \quad (17)$$

ここで ΔP は、

$$\Delta P(x,0;k) = P(x,-0;k) - P(x,+0;k) \quad (18)$$

である。式(16)は次のように変形する。

$$h(x-\xi;k) = \frac{1}{x-\xi} + \frac{1}{2} \pi k + k \operatorname{sgn}(x-\xi) \left\{ R_1 + \int_0^{k|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} \quad (19)$$

$$\text{ここで } R_1(z) = K_1(z) - \frac{1}{z} \quad (20)$$

したがって式(15)は次のようになる。

$$\frac{d}{dx} f_c(x,0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{1}{x-\xi} \Delta P(\xi,0;k) d\xi - \frac{1}{4} k \int_0^c \Delta P(\xi,0;k) d\xi - \frac{1}{2\pi} k \int_0^c \operatorname{sgn}(x-\xi) \left\{ R_1(k|x-\xi|) + \int_0^{k|x-\xi|} K_0(t) dt \right\} \Delta P(\xi,0;k) d\xi \quad (21)$$

式(21)に式(17)を代入すると、未知関数 ΔP の級数の係数についての連立一次方程式が得られる。標点位置は弦長方向であるので、Schlichtingの方法⁽⁵⁾を採用する。すなわち、

$$x_\nu = \frac{c}{4N} (4\nu - 1) \quad (22)$$

ここで N は標点数である。

なお、計算結果の精度には問題が残っており、固有値の数や標点数等について現在検討中である。

4. 流体力特性

4・1 局所揚力係数

板幅方向の任意断面における局所揚力は、板の上下面の圧力差を長さ方向に積分して得られるので次式が成立する。

$$\ell(y) = \int_0^c \{p(x,y,-0) - p(x,y,+0)\} dx \quad (23)$$

局所揚力係数は次のように定義する。

$$C_\ell(y) = \frac{\ell(y)}{\frac{1}{2} \rho \{U(y)\}^2 c} \quad (24)$$

したがって、式(6,17,18,23,24)から局所揚力係数は次式のようになる。

$$C_\ell(y) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\{U(y)\}^2} \sum_k F(k) Y(y;k) \{2A_0(k) + A_1(k)\} \quad (25)$$

4・2 圧力係数

圧力係数を次のように定義する。

$$C_p = \frac{2p}{\rho \{U(y)\}^2} \quad (26)$$

平行壁間にまたがる平板まわりの流れの解析法

式(26)に式(6)を代入すると次式が得られる。

$$C_p(x,y,z) = \frac{2}{\{U(y)\}^2} \sum_k F(k) Y(y;k) P(x,z;k) \quad (27)$$

また,

$$P(x,\pm 0) = \mp \frac{1}{2} \Delta P(x,0) \quad (28)$$

なる関係を用い、式(27)に式(28)を代入すると、結局圧力係数として次式が得られる。

$$C_p(x,y,\pm 0) = \mp \frac{1}{\{U(y)\}^2} \sum_k F(k) Y(y;k) \times \{A_0(k) \cot \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(k) \sin n\varphi\} \quad (29)$$

4・3 全揚力係数と全抗力係数

全揚力は、板表面上の任意点における板上下面の圧力差を、長さ方向と板幅方向に2重積分することによって得られるので次式が成立する。

$$L = \int_0^\lambda \int_0^c \{p(x,y,-0) - p(x,y,+0)\} dx dy \quad (30)$$

式(30)の積分を実行すると、全揚力は次式のようになる。

$$L = \frac{\pi}{2} c \lambda \rho \sum_k \{F(k)\}^2 \{A_0(k) + \frac{1}{2} A_1(k)\} \quad (31)$$

全揚力係数を次式のように定義する。

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} c \rho \int_0^\lambda \{U(y)\}^2 dy} \quad (32)$$

今、速度分布として式(7,8)によって与えられる場合を考えると、式(32)の分母の積分は次のようになる。

$$\int_0^\lambda \{U(y)\}^2 dy = \frac{2}{3} y_e (U_0^2 + U_1^2 + U_0 U_1) + U_1^2 (\lambda - 2y_e) \quad (33)$$

したがって全揚力係数は、式(31,32,33)より

$$C_L = \frac{3\pi c \lambda \sum_k \{F(k)\}^2 \{A_0(k) + \frac{1}{2} A_1(k)\}}{2y_e (U_0^2 + U_1^2 + U_0 U_1) + 3U_1^2 (\lambda - 2y_e)} \quad (34)$$

ここでF(k)は式(11)によればよい。

また同様に全抗力係数は、

$$C_D = \frac{3}{8} \frac{(\pi c)^2 \lambda \sum_k \{F(k)\}^2 \{A_0(k) + \frac{1}{2} A_1(k)\}^2}{2y_e (U_0^2 + U_1^2 + U_0 U_1) + 3U_1^2 (\lambda - 2y_e)} \quad (35)$$

5. 数値計算例

数値計算は図2に示すような流れモデルについて行った。速度分布は $(U_1 - U_0)/U_1 = 0.5$ で一定とし、板幅のセンターラインについて対称で、板の平面形は矩形について計算を行った。円弧翼における ϵ は

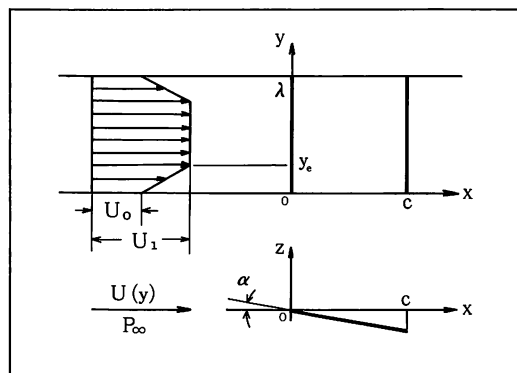


図2 計算例

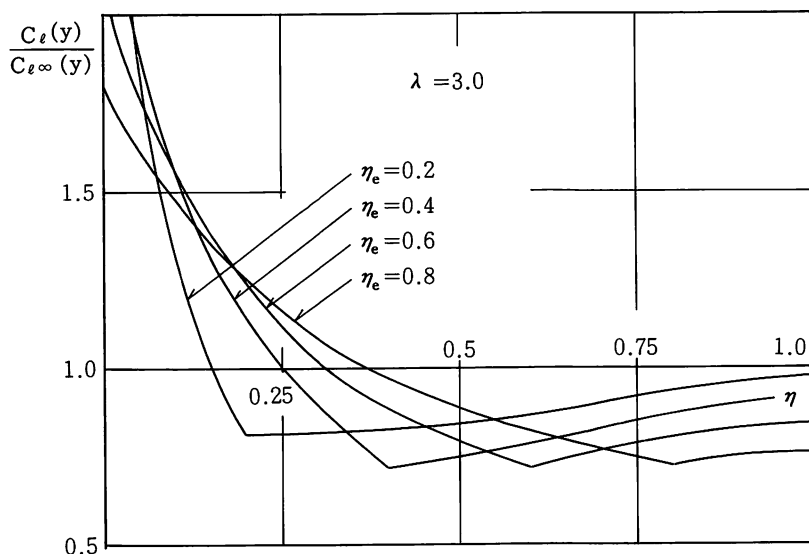


図3 揚力分布 (平板翼)

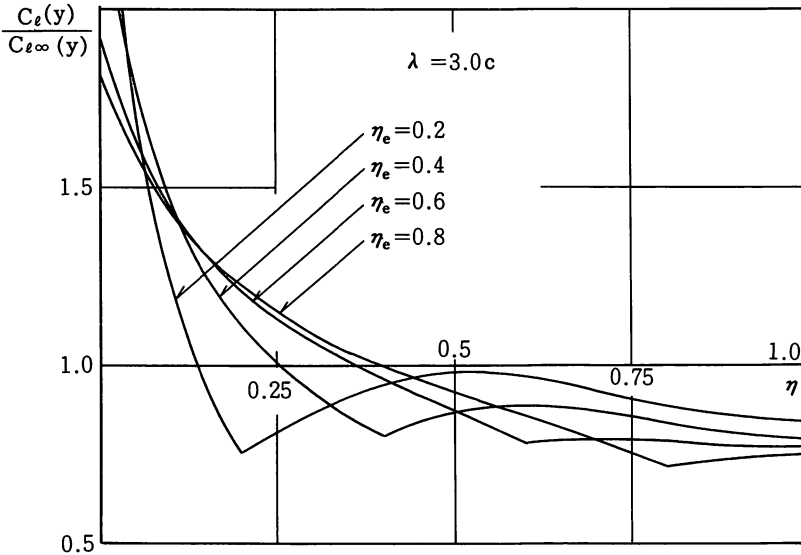


図4 揚力分布
(円弧翼)

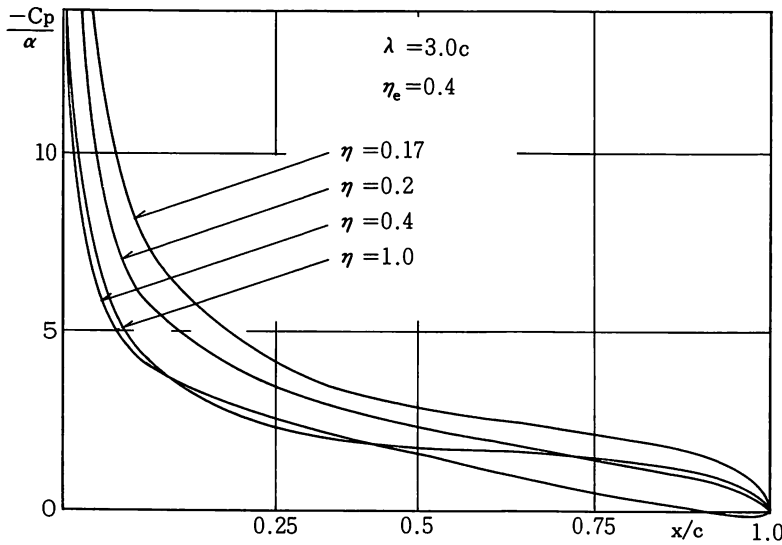


図5 圧力分布
(平板翼, 断面位置の影響)

反り比である。図3, 4はアスペクト比 λ/c が3の平板及び円弧翼の翼幅方向揚力分布に及ぼす $\eta_e (=2y_e/\lambda)$ の影響を示している。 η_e が小さいほど、壁面近傍の速度勾配は大きくなり、したがって渦度も大きくなるが、ここでの局所揚力は大きな値を示す。一方 η_e が小さくなることにより、一定速度の領域は増すが、速度分布は η_e が大きい場合に比べてやはり大きな値となっており、二次値 $C_{l\infty}(y)$ に近い値を示す。

図5, 6は、アスペクト比 λ/c が3, $\eta_e = 0.4$ の流れにおける平板および円弧翼の弦長方向圧力分布に

及ぼす幅方向断面位置 η の影響を示している。平板円弧翼いずれの場合も壁面に近いほど圧力分布は大きな値となっているが、円弧翼の翼幅中心における圧力分布は他と異なる傾向を示している。

図7, 8は、アスペクト比 λ/c が3, 断面位置が $\eta = 0.2$ における平板および円弧翼の弦長方向圧力分布に及ぼす $\eta_e (=2ye/\lambda)$ の影響を示している。平板、円弧翼いずれの場合も η_e が大なるほど圧力分布は大きな値を示すようになる。

図9は、 $\eta_e = 0.4$ の流れにおける平板について、アスペクト比の逆数 c/λ に対する全揚力係数 C_L と全抗力

平行壁間にまたがる平板まわりの流れの解析法

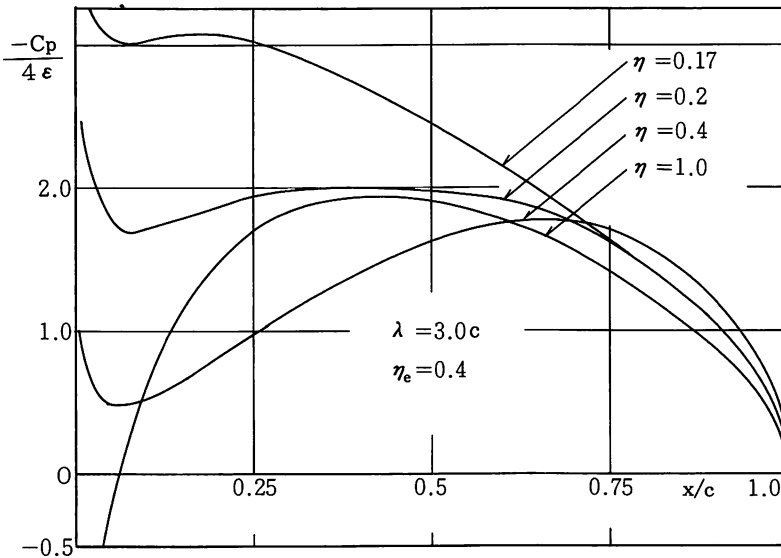


図6 圧力分布
(円弧翼, 断面
位置の影響)

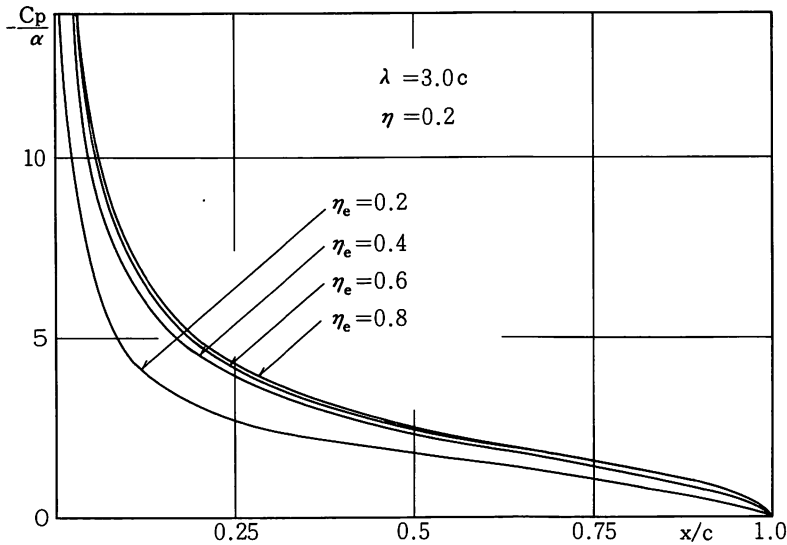


図7 圧力分布
(平板翼, 速度
分布の影響)

係数 C_D の変化を示したものである。全揚力係数はアスペクト比の大きい領域を除くと、アスペクト比の変化による影響は小さい。しかし全抗力係数はアスペクト比の変化に対して大きく変化し、特に $c/\lambda = 0.2 \sim 0.3$ の範囲で極大値を持つ。

6. むすび

本解法は本田の理論に比べて、数学的取り扱いが容易であり、精度上の問題が解決すれば混合境界問題や時間依存性のある問題へ効果的に拡張できるも

のと考えられる。

参 考 文 献

- [1] Honda, M., Theory of a Thin Wing in a Shear Flow, Proc. of the Royal Society, Series A, Vol.254, No.1278, 1960, PP.372-394.
- [2] Ito, J., Calculation of Partially Cavitating Thick Hydrofoil and Examination of a Flow Model at Cavity Termination, Proc.

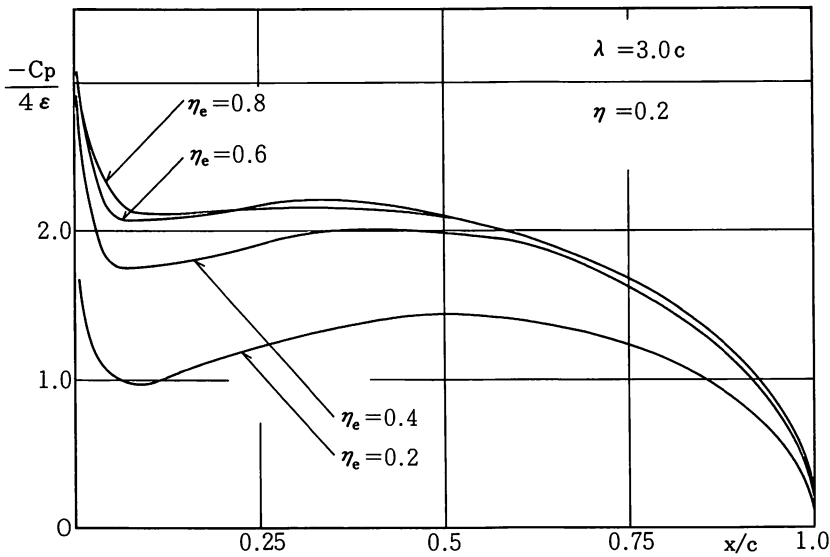


図8 圧力分布
(円弧翼, 速度分布の影響)

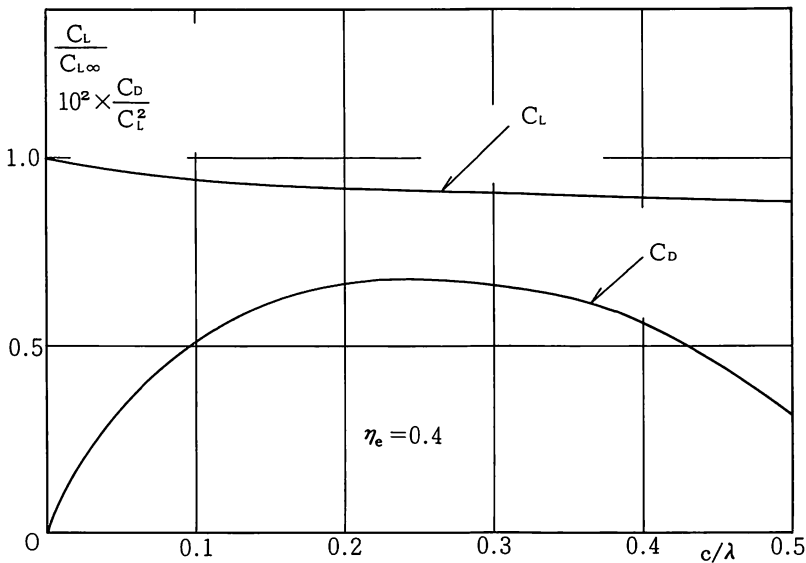


図9 全揚力と全抗力
(平板翼)

International Symposium on Cavitation, April 16-19, 1986, Sendai, PP.209-214.

- (3) Ito, J., Lifting-line Approximation for Wing and Propeller in Partial Cavitation, Proc. Cavitation and Multiphase Flow Forum-1987, FED-Vol.50, PP.84-88.
- (4) Ito, J., Analytical Method and Cavity

Model of Partially Cavitating Hydrofoils, Proc. Second International Symposium on Transport Phenomena, Dynamics and Design of Rotating Machinery, April 3-6, 1988, Honolulu, PP.183-198.

- (5) Schlichting, H., VDI-Forschungsheft 447, Ausgabe B, Band 21, 1955, PP.1-35.