サーボ機構の Sensitivity 設計法

（第 1 報）

柳　原　昌　輝

1. 緒　　言

従来のサーボ機構の設計並びに補償回路の設計法においては，Sensitivity についてはあまりふれておらず，又固定部伝達関数が，変化するたびにそれぞれの補償回路伝達関数を計算しなければならなかった。

そこで本文では，固定部伝達関係の形を

$$G(S)=\frac{K_1}{S(S+P)}$$

としたとき，式中のK_1, S, Pをそれぞれ ω_0 で割り，又その他設計上関係のあるすべての文字を ω_0 で normalize しておく。そうすれば pole P の値が変っても新しい伝達関数の pole は P/ω_0 の形になっているから，いろんな値の場合に適応させることができる。

よって本文では，サーボ機構の設計法の一般化，及び P（固定部伝達関数の正の実数部）の変化に対する Sensitivity の変動の度合を計算し，Pの許容変動範囲を調べ，又アナログコンピューターで実際に問題を作って，検討してみた。

2. 直列補償法と Sensitivity

2・1　1次遅れ進み補償の場合

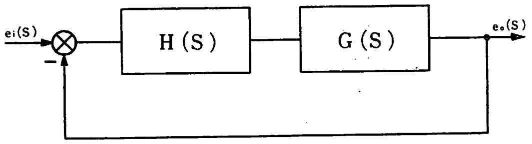

図1　直列補償のブロックダイヤグラム

$$G(S)=\frac{K_1}{S(S+P)}$$

$$H(S)=\frac{(S+\alpha)K_2}{S+P_3}$$

図1は，サーボ制御系のブロックダイヤグラムである。ここで ei(s) は目標値，$e_0(s)$ は制御量，$\frac{K_1}{S(S+p)}$ は，固定部伝達関数，$\frac{K_2(s+\alpha)}{s+p_3}$ は補償回路伝達関数である。

今固定部伝達関数G(s)を次の様に置く。

$$G(s)=\frac{K_1}{S(S+P)}\ (P:\text{正の実数})\cdots\cdots(2-1)$$

両辺を $\omega_0{}^2$ で割ると（2−1）式は次の様になる。

$$G(s)=\frac{\frac{k_1}{\omega_0{}^2}}{\frac{s}{\omega_0}\left(\frac{s}{\omega_0}+\frac{P}{\omega_0}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2-2)$$

（2−2）式において$\frac{S}{\omega_0}=S'$, $\frac{P}{\omega_0}=P'$, $\frac{k_1}{\omega_0{}^2}=K_1'$とすると（2−2）式は次の様に置き換えられる。

$$G(s)=\frac{K_1'}{S'(S'+p')}\cdots\cdots\cdots\cdots(2-3)$$

サーボ系の速度定数Kv は閉ループ極，開ループ極とを関係づけた式

$$Kv=\frac{q_1\cdot q_2\cdot q_3}{P\cdot P_3}=\frac{\omega_0{}^2\cdot q_3}{P\cdot P_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(2-4)$$

ここで

$$q_1=-\xi_0\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-\xi_0{}^2}$$

$$q_2=-\xi_0\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-\xi_0{}^2}$$

即ち速度定数は，閉ループ極の積を，開ループ極（原点以外）の積で割ったものである。

（2−4）式を（2−2）式と同様にω_0で割ると，まず左辺 Kv は，

$$Kv_N=\frac{Kv}{\frac{\omega_0}{2\xi_0}}=\frac{2Kv\xi_0}{\omega_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(2-5)$$

とおきかえられ，右辺$\frac{\omega_0{}^2\cdot q_3}{P\cdot P_3}$は

$$\frac{\frac{\omega_0{}^2\cdot q_3}{P\cdot P_3}}{\frac{\omega_0}{2\xi_0}}=\frac{\omega_0}{P}\cdot 2\xi_0\cdot\frac{\frac{q_3}{\omega_0}}{\frac{P_3}{\omega_0}}\cdots\cdots\cdots(2-6)$$

となる。

ここにおいて $q'_3=\frac{q_3}{\omega_0}$, $P'_3=\frac{P_3}{\omega_0}$とすると，(2−5)（2−6）式より

$$Kv_N=\left(\frac{1}{P'}\right)\cdot 2\xi_0\cdot\left(\frac{q'_3}{P'_3}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2-7)$$

となる。

又，Kv は Guillemin 氏によって与えられた

$$\frac{1}{Kv}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q_i}-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\alpha_i}\text{より}$$

$$\frac{1}{Kv}=\frac{2\xi_0}{\omega_0}+\frac{1}{q_3}-\frac{1}{\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots (2-8)$$

となり，同様に両辺をω_0で normalize すると，左辺の $\frac{1}{Kv}$は$\frac{1}{K_{VN}}=\frac{\omega_0}{2\xi_0 Kv}$となり，右辺の$\frac{2\xi_0}{\omega_0}+\frac{1}{q_3}-\frac{1}{\alpha}$は $1+\frac{\omega_0}{2\cdot\xi_0\cdot q_3}-\frac{\omega_0}{2\cdot\xi_0\cdot\alpha}$となる。よって (2−8) 式は，

$$\frac{1}{K_{VN}}=1+\frac{\omega_0}{2\xi_0 q_3}-\frac{\omega_0}{2\xi_0\alpha}\cdots\cdots\cdots (2-9)$$

ここで$\alpha'=\frac{\alpha}{\omega_0}$とすると，(2−9) 式は

$$\frac{1}{K_{VN}}=1+\frac{1}{2\xi_0 q_3'}-\frac{1}{2\xi_0\alpha'}\cdots\cdots\cdots (2-10)$$

多くの場合，閉ループ極，零点の数の差は２か，あるいはそれ以上である。このとき

$$2\xi_0\omega_0+q_3=P+P_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-11)$$

同様に（２−11）式もω_0で normalize しておくと，

$$2\xi_0+\frac{q_3}{\omega_0}=\frac{P}{\omega_0}+\frac{P_3}{\omega_0}$$

故に $2\xi_0+q'_3=P'+P'_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-12)$

となる。

又，サーボ系の速度定数 Kv は$S\cdot G(s)$の$S\to 0$での値であるから，周知のように

$$Kv=K_1\cdot K_2\frac{\alpha}{P\cdot P_3}$$

変形して

$$Kv\cdot P\cdot P_3=K_1\cdot K_2\cdot\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots (2-13)$$

ここで

$$Kv=\omega_0\frac{K_{VN}}{2}\xi_0,\ P=P'\cdot\omega_0,\ P_3=P_3'\omega_0,$$

$$\alpha=\alpha'\cdot\omega_0$$

をそれぞれ（２−13）式に代入すると，（２−13）式は

$$\frac{\omega_0\cdot K_{VN}}{2\cdot\xi_0}\cdot P'\cdot\omega_0\cdot P'_3\cdot\omega_0=K_1'\cdot\omega_0^2\cdot K^2\cdot\alpha'\cdot\omega_0$$

故に

$$K_{VN}\cdot P'P_3'=K'_1\cdot\alpha'\cdot 2\xi_0\cdot K_2\cdots\cdots\cdots (2-14)$$

（２−14）式より

$$K_1'\cdot K_2=\frac{P'\cdot P_3'\cdot K_{VN}}{2\xi_0\cdot\alpha'}\cdots\cdots\cdots\cdots (2-15)$$

が求められる。

2・2 Sensitivity と極，零点の関係

次に Sensitivity の考え方として，K・Bode によって考えられた式を利用してやってみた。K・Bode の Sensitivity というのは，G(S) をＳの関数としてのみ着用するが一般には，Ｋを変化要素として考えなければならず，G(S,K)として考えた。

又 Sensitivity には Pole−Sensitivity や Zero−Sensitivity や，Ｋの影響による Sensitivity などいろいろあるが本文では，Open-Pole の変動の応答に与える影響について考えてみた。

今，伝達関数を次のように考える。

$$G(s)=\frac{K\cdot P(s)}{q(s)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-16)$$

（２−16）式の closed-loop は

$$Gc(S)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{K\cdot P(s)}{q(s)+K\cdot P(s)}\cdots (2-17)$$

となる。

（２−17）式において

$$G_t\,(S\cdot K)=q(s)+K\cdot P(s)\cdots\cdots (2-18)$$

とおくと，root-Locus は，$q(s)+KP(s)=0$を満足するSである。この値を Sj とすると，

$$q(s_j)+K\cdot P(s_j)=0\text{となる。}\cdots\cdots (2-19)$$

$$K=-\frac{q(s_j)}{P(s_j)}=-\prod_i (S_j-S_i)^{A_i}\cdots\cdots (2-20)$$

Si は q の根の時に Ai＝１

Si は P の根の時に Ai＝−１

（２−20）式の対数微分をとって

$$\frac{\frac{dk}{k}}{ds_j}=\frac{q'}{q}-\frac{P'}{P}=\sum_i\frac{A_i}{S_j-S_i}\cdots\cdots (2-21)$$

Sj は（２−18）式の根である。故に Sj は Gc(s) の Pole である。

今，Sensitivity をＫの変動に対しての代表根 Sj の変動の割合いと考えると

$$S_K^P=\frac{ds_j}{\frac{dk}{k}}$$

$$\left(\because\ S_K^P=\frac{\delta s_j}{\frac{dk}{k}}\text{と}\ \delta S_j=ds_j\ \text{より}\right)$$

故に（２−21）式との関係より

$$S_K^P=\frac{1}{\sum\frac{A_i}{S_j-S_i}}=\frac{-pq}{qp'-pq'}$$

$q=-K\cdot P$ であるから

$$S_K^P=\frac{P\cdot K\cdot P}{-KPP'-pq'}=-\frac{KP}{q'+kp'}\quad(P\fallingdotseq 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-22)\ (a)$$

この式は次の様にもなる。

$$S_K^P = -\frac{KP}{\frac{\delta Gt}{\delta s}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-22)\ (b)$$

(2 −22) (b)式を利用して

$$\frac{\delta Sj}{\delta ai} = -\frac{S_K^P}{Sj+ai} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-23)$$

a_i : Open−loop−pole

(2 −23) 式において$\frac{\delta sj}{\delta ai}$は pole:$a_i$ の微少変化に対する根（代表根）Sj の微少変化の割合いで，Sj，a_i は変化前の根と Pole を表わしている。

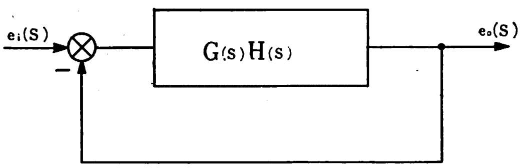

図2　直列補償のブロックダイヤグラム

$$G(s)H(s) = \frac{K_1K_2(S+\alpha)}{S(S+P)\ (S+P_3)}$$

さて図1のブロックダイヤグラムは図2に書き換えられるから，図2の Closed-loop を考えてみると，

$$G_M(S) = \frac{K_1K_2(S+\alpha)}{S(S+P)\ (S+P_3)}$$

より

$$G_C(S) = \frac{K_1K_2\ (S+\alpha)}{S(S+P)(S+P_3)+K_1K_2(S+\alpha)}$$

となり（2 −17）式と比べてみると

$K=K_1K_2$，$P(s)=S+\alpha$，$q(S)=S(S+P)(S+P_3)$ よってこれらを（2 −22）式に代入すると

$$S_K^P = -\frac{K_1K_2(S+\alpha)}{3S^2+2(P+P_3)S+PP_3+K_1K_2}$$

となる。よって（2 −23）式を求めてみると

$$\left|\frac{dsj}{dp}\right| = \left|\frac{K_1K_2(S+\alpha)}{(Sj+P)\ \{3S_2+2(P+P_3)S+PP_3+K_1K_2}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots (2-24)$$

（2 −24）式もそれぞれの文字を ω_0 で normalize すると次のようになる。

$$\left|\frac{dsj}{dp}\right| = \left|\frac{\frac{K_1}{\omega_0^2}\cdot K_2\left(\frac{S}{\omega_0}+\frac{\alpha}{\omega_0}\right)}{\left(\frac{Sj}{\omega_0}+\frac{P}{\omega_0}\right)\left\{3\left(\frac{S}{\omega_0}\right)^2+2\left(\frac{P}{\omega_0}+\frac{P_3}{\omega_0}\right)\frac{S}{\omega_0}+\frac{P}{\omega_0}\cdot\frac{P_3}{\omega_0}+\frac{K_1}{\omega_0^2}\cdot K_2\right.}\right|$$

$$= \left|\frac{K'_1\cdot K_2\ (S'+\alpha')}{(Sj'+P')\ \{3S'^2+2\ (P'+P'_3)\cdot S'+P'P'_3+K'_1\cdot K_2}\right| \cdots\cdots\cdots\cdots (2-25)$$

3. Sensitvity 設計法

3—1　直列補償の場合の Sensitivity 設計法

そこで，今ある固定部伝達関数$G(S) = \frac{K_1}{S(S+P)}$を考えた場合，与えられるのは，P，$K_1$，その他ダンピング定数 ξ_0，速度定数 Kv の4つである。これらを ω_0 で normalize した形，P'，K_1'，ξ_0，K_{VN}を与えて，その他（2 −25）式に必要な α'，P'_3は，（2−7），（2 −10），（2 −12），（2 −15）式より求める。その他 Closed-loopの根 q'_3 も同様に上式（2 − 7），（2 − 10），（2 −12），（2 −15）式より求める。

（2 − 7）式，（2 −12）式より

$$K_{VN}\cdot P'\cdot P'_3 = 2\xi_0\cdot q'_3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2-7)$$

$$P'_3 - q'_3 = 2\xi_0 - P' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2-12)$$

（2 − 7）式を（2 −12）式へ代入

$$P'_3 - \frac{K_{VN}\cdot P'\cdot P'_3}{2\xi_0} = 2\xi_0 - P'$$

$$\therefore \quad P'_3 = \frac{2\xi_0 - P'}{1-\frac{K_{VN}\cdot P'}{2\xi_0}} \cdots\cdots\cdots\cdots (3-1)$$

（3 − 1）式を（2 − 7）式へ代入し，q'_3 を求めると

$$q'_3 \doteqdot \frac{K_{VN}\cdot P'}{2\xi_0}\cdot\frac{2\xi_0-P'}{1-\frac{K_{VN}\cdot P'}{2\xi_0}} \cdots\cdots (3-2)$$

次に（2 −10）式よりα'を求めると

$$\frac{1}{2\xi_0\alpha'} = \frac{1}{2\xi_0\, q'_3} + 1 - \frac{1}{K_{VN}} \cdots\cdots\cdots (2-10)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\alpha'} = \frac{K_{VN}+2\xi_0 q'_3\cdot K_{VN}-2\xi_0 q_3'}{q'_3\cdot K_{VN}}$$

$$\therefore \quad \alpha' = \frac{q'_3\cdot K_{VN}}{K_{VN}\ (1+2\xi_0 q'_3)\ -2\xi_0 q'_3} \cdots\cdots (3-3)$$

又（2 −15）式より

$$K'_1\cdot K_2 = \frac{P'\cdot P'_3\cdot K_{VN}}{2\xi_0\cdot\alpha'} \cdots\cdots\cdots\cdots (2-15)$$

一般にサーボ機構のダンピング定数 ξ_0は 0.4〜0.6の間にあるため，$\xi_0=0.5$ として一般式をたてると，代表根 Sj' は

$$Sj' = -\xi_0 + j\sqrt{1-\xi_0^2}$$
$$= -0.5 + j\,0.866$$

となり（2 −25）式の

分子は，$|\ K'_1\cdot K_2\ (-0.5+j\,0.866+\alpha')\ |$

分母は，|（$-0.5+j0.866+P'$）{$-1.5-j2.6+(-1+j1.732)(P'+P'_3)+P'P'_3+K'_1\cdot K_2$} |

となる。

$$\therefore \quad \left|\frac{dsj}{dp}\right| = \left|\frac{K_1'\cdot K_2\,(-0.5+j0.866+\alpha')}{(-0.5+j0.866+P')\,\{-1.5-j2.6+(-1+j1.732)(P'+P_3')+P'P_3'+K'_1K_2\}}\right| \qquad \cdots\cdots(3-4)$$

図２のブロックダイヤグラムを考えてみると下図，図３のようになる。

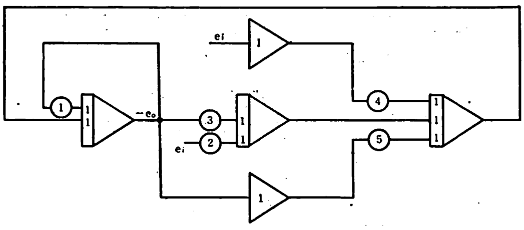

図３　（図２）のブロックダイヤグラム

ここで Potentiometer の①，②，③，④，⑤はそれぞれ($P'+P'_3$)，$\alpha'\cdot K'_1\cdot K_2$，$\alpha'\cdot K'_1\cdot K_2$，$K'_1\cdot K_2$，($P'\cdot P'_3+K'_1\cdot K_2$) である。

そこで $\xi_0=0.5$，$K_{VN}=1.2$，$K'_1=0.016$とし，P'が色々変った場合について dsj/dp を調べてみると図４のような曲線になり，$K_{VN}=1.2$ 内外の場合についても調べてみた。

なお，$\left|\frac{dsj}{dp}\right|$の値は，FACOM-270-20 を使用して計算した。

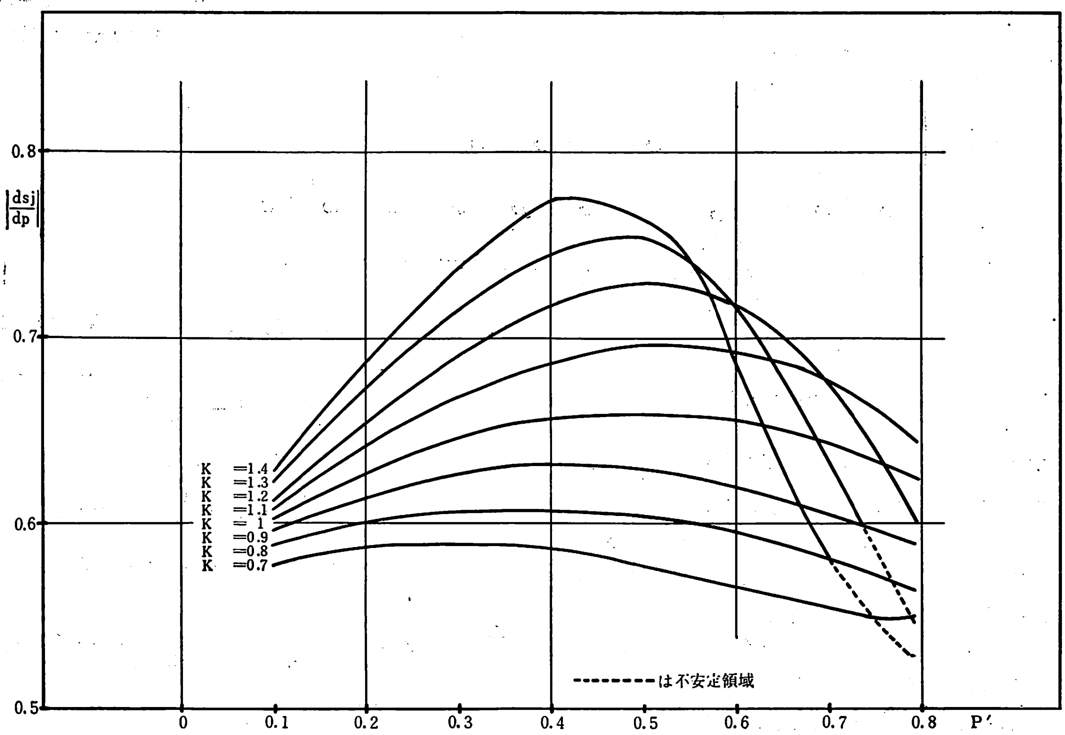

図４　Sensitivity–P′ Curve

4．例　題

$G(S)=\frac{100}{S(S+10)}$とし，$\xi_0=0.5$，$K_{VN}=1.2$，$K'_1=0.016$ とする。$P'=0.4$，$P_3'=1.154$，$q_3'=0.554$，$\alpha'=0.507$，$K_2=68.27$となる。

これらを（３－４）式に代入する。

$$\left|\frac{dsj}{dp}\right|=0.722$$

又，$G(S)=\frac{100}{S(S+20)}$ となる場合も同様に $P'=0.8$，$P'_3=5.0$，$q_3'=4.8$，$\alpha'=2.67$，$K_2=112$，$K'_1=0.016$ $K_{VN}=1.2$

$$\left|\frac{dsj}{dp}\right|=0.603$$

これらそれぞれの場合についてPの値を，微少変化させたとき，応答への影響は，次の様になる。

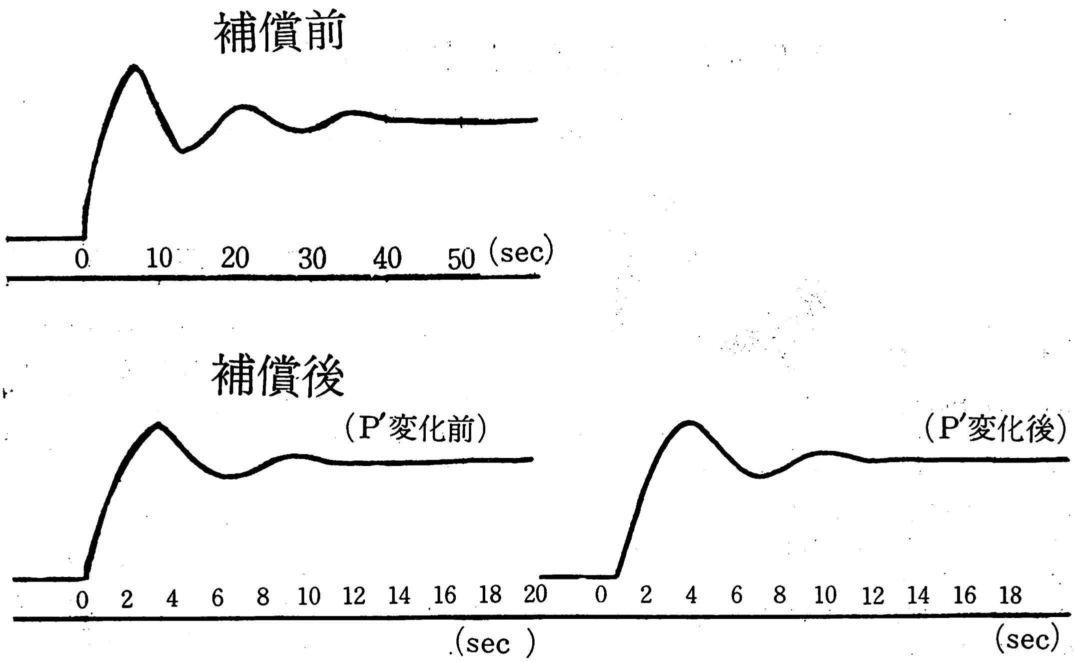

図　アナコンによる過渡応答の比較

よって $G(S)=\frac{k_1}{S(S+P)}$ のPの値は，色々な場合について，考えられたが，K_1 の値は，そのたびに変化するのでそのつど 0.016K のKに $\frac{K_1}{100}$ を代入し，その値を求めるとよい。

5. 結　言

以上のように Open-loop-pole の変動の Sensitivity に与える影響は，図にも表わされているように，立ち上りが悪くなるけれども，応答時間は変化前とさほど変らない。

又 Sensitivity-Curve（図4）と K_{VN} との関係は，$K_{VN}>1$（$K_V>\omega_0$）の場合は Sensitivity の変化が激しく，一方 $K_{VN}<1$（$K_V<\omega_0$）の場合は変化が少なくほぼ一定になっていることがわかった。なお本文をもとにしてやった，Sensitivity による補償回路の設計は第２報でもって報告することにする。本論文を作成するにあたり，御指導下さいました秋田大学鉱山学部片山愛介教授，並びに渡部倫寧助教授に深く感謝致します。

参　考　文　献

1）片山愛介　電気学会誌　35—80