

## 河川水質時系列への数値フィルターの応用に 関する二、三の考察

佐藤 悟

### Some Studies on Application of Mathematical Filter to Water Quality Sequences in River

Satoru SATO

(昭和58年10月31日受理)

There are many mathematical or experimental methods to separate run-off components from discharge or rainfall sequences. Mathematical filter is one of those methods, which is mainly used in electrical field.

Generally, it can be thought that water quality sequences similar to discharge ones, like a suspended matter especially. (COD, SS, Turbidity etc.) So it seems to be possible to apply a similar concept in case of water quality problem.

This paper presents an application of this method, and tries to separate actual daily discharge and water quality to each components. (Surface and groundwater run-off)

#### 1. はじめに

降雨は地表面に達した後、表面流出、中間流出、地下水流出の各成分として流域内を流れ、これらがまとまって流出するものと一般に考えられている。これら各成分の分離方法としては、種々の推定法が報告されているが、降雨流量から主として量的な面で推定するものや、また水質面から推定するものなど、いまだ確立した手法はないものと思われる。

本稿で扱う数値フィルターもそれらのうちの一手法で、流量時系列を降雨に対し応答の早い高周波系列（表面流出成分）と、逆に応答の遅い低周波系列（地下水流出成分）とに分離できる、ある特性をもった数理的なフィルターである。

一方河川水質時系列は、水質項目にもよるが、流量時系列と非常に密接な関係をもつ。表面流出成分の卓越する出水初期には、主に地表面からの洗い出し、河床のまきあげ等に由来する浮遊性物質（SS、濁度、COD等）が大きな比率をしめ、また逆に出水終期、もしくは渇水期には地質、水温等の影響をうける地下流出成分（アルカリ度、総硬度等）が大きな比率をしめる。そのためこれら二つの成分は、それぞれ流量と正の相関、負の相関を示すことになる。

このように各流出成分固有の水質が仮定できるため、河川水質時系列にも直接数値フィルターをほど

こし、水質面での成分分離も可能と思われる。本稿では流量時系列、水質時系列に数値フィルターの概念を用い、直接水質面からの各成分濃度の検討を行なうとともに、この手法の適用性についての若干の考察を加えた。

#### 2. 数値フィルター

フィルターとは、数多くの情報の混じり合った入力から、必要とするものを取り出すために、ある特定の条件（周波数）をもつものだけを通す、もしくはカットするためのもので、一般には電気分野で多く用いられるものである。しかし、一般的な自然現象において得られる種々の時系列も、Time-scaleが異なる事を除けば何ら電気的な信号と変わらず扱うことができ、よってこれらにもフィルターの概念を導入することができるものと思われる。

##### 2-1 成分分離日数（周波数）の決定

河川流量を表面、地下水流出成分に分離するために、最初に、分離する際の周波数（Cut-off frequency）を決定する必要がある。この方法としては

- a) 自己回帰係数（AR係数）による方法

- b) 自己相関関数 (係数) による方法
- c) 降雨時系列と流量時系列とのコヒーレンスによる方法

等が考えられる。a) は時系列  $y_i$  が次の自己回帰式 (AR モデル) で表わされるものとし、この場合の自己回帰係数により決定するものである。

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + \dots + a_k y_{i-k} + \varepsilon_i \quad (1)$$

$y_i$  : 対象とする時系列  
 $a_1 \dots a_k$  : 自己回帰係数  
 $\varepsilon_i$  : 白色雑音

いまこの各係数は、時刻  $t$  以前の  $i-1, i-2, \dots, i-k$ , すなわち時刻  $k$  以後の時刻  $t$  に影響する重みと考えることができる。すなわち重み  $a_k$  が十分小さくなる時点 (日数) を分離日数  $T_c$  として考えるものである。(分離周波数  $f_c = 1/T_c$ ) b) は時系列の自己相関構造から決定するものである。一般には自己相関係数を求め、その値が十分小さくなった時点、いにかえるならば後の時系列に影響をおよぼさなくなるおくれ日数を分離日数とするものである。c) は降雨-流出系の資料が十分に整っている場合に用いられるもので、コヒーレンス、フェイズにより分離日数が推定されるものである。

2-2 数値フィルターの利用

- i) 滷波特性の鋭い数値フィルター

ある周波数特性  $A(f)$ , (図-1,  $f_i < f < f_h$  を通すもの) が与えられた場合の数値フィルター  $\omega(t)$  は、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(f) \cdot e^{i2\pi f t} df \\ &= 2 \int_{f_i}^{f_h} 1 \cdot \cos 2\pi f t df \end{aligned}$$

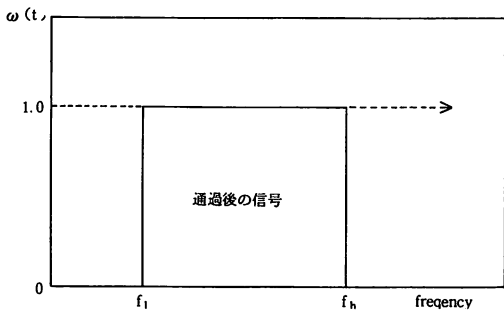


図-1 数値フィルターの概念

$$= (\sin 2\pi f_h t - \sin 2\pi f_i t) / \pi t \quad (2)$$

いま  $f_i = 0$  とし、周波数  $f_h$  までの信号をすべて通す High-cut filter とすれば、この数値フィルターは

$$\omega(t) = (\sin 2\pi f_h t) / \pi t \quad (3)$$

と表わすことができる。しかし、この式で十分な滷波特性をもつフィルターを期待するには、非常にその項数を多くとる必要が生じる。いわゆる矩形波をフーリエ級数で表現するわけで、不十分な項数では不連続点で級数和近似値がとび出す、いわゆる Gibbs 現象が現れるためである。

- ii) 滷波特性の緩やかな数値フィルター (後方作用の数値フィルター)

水文現象は、一般に次の高階常微分方程式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 y(t) = \\ a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_0 x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

いま短期流出成分は、次の簡単な二階の常微分方程式で表現されることが多い。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{x(t)}{m} \quad (5)$$

このような系の単位インパルス応答関数  $h(\tau)$  は、 $c_1 = c/m, c_0 = k/m$  とすると

$$h(\tau) = \frac{\exp(-c_1 \tau / 2) \cdot \sin(\sqrt{c_0 - c_1^2 / 4} \cdot \tau)}{\sqrt{c_0 - c_1^2 / 4}} \quad (c_0 - c_1^2 / 4 \geq 0, \tau > 0) \quad (6)$$

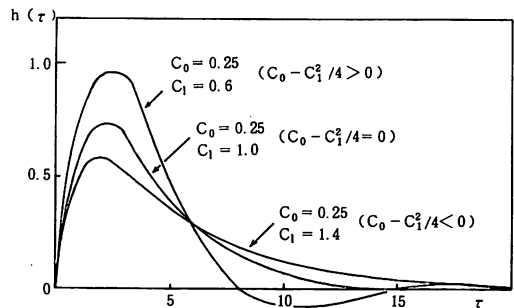


図-2 単位インパルス応答関数  $h(\tau)$  の変化

$$h(\tau) = \frac{\exp(-c_1\tau/2) \cdot \sinh(\sqrt{c_1^2/4 - c_0} \cdot \tau)}{\sqrt{c_1^2/4 - c_0}} \quad (c_0 - c_1^2/4 < 0, \tau > 0) \quad (7)$$

$$h(\tau) = 0 \quad (\tau < 0) \quad (8)$$

で表現される。なお図-2に各振動型の区分を示した。

使用にあたっては、2-1で決定された分離日数  $T_c$  より分離角周波数  $\omega_c$  と減衰係数  $\delta$  とを仮定し、戸波後の出力  $y_1(t)$  を次式で求める。

なお、 $\omega_c = \sqrt{k/m}$ ,  $\delta = c/(m\omega_c)$  とする。

$$\omega_k = \begin{cases} h(k\Delta t) & (k = 0, 1, 2, \dots, N) \\ 0 & (k = -1, -2, \dots) \end{cases} \quad (9)$$

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^N \omega_k \cdot y_{t-k}$$

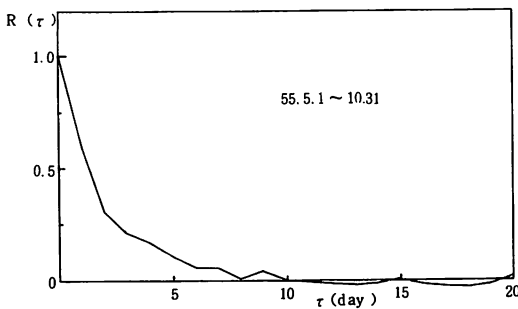
このように分離された低周波成分を、一義的にすべて地下水流出成分  $y_1(t)$  とみなすと、表面流出成分  $(y(t) - y_1(t))$  が時として負になることがあり、そのためフィルターに次の重み  $\alpha$  を乗じ、全体の値を補正する必要が生じる。

$$\text{Min}\{y(t) - \alpha \sum \omega_k y_{t-k}\} \geq 0 \quad (10)$$

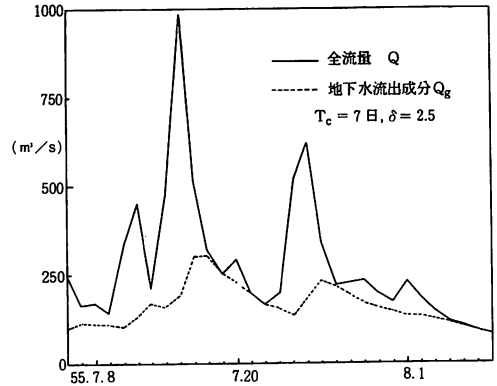
またこのままでは、地下水流出成分が大部分をしめる渇水期に小さな値を示す危険性があるため、次の

表一 流量時系列の自己回帰係数 (Yule-Walker法)

| 次数 | AR係数   | 次数 | AR係数   |
|----|--------|----|--------|
| 1  | -0.649 | 6  | 0.027  |
| 2  | 0.144  | 7  | 0.020  |
| 3  | -0.089 | 8  | -0.119 |
| 4  | -0.017 | 9  | 0.026  |
| 5  | 0.006  | 10 | 0.043  |



図一 全流量に対する自己相関係数



図一 流出成分分離結果

基底流量 Bias を加え、補正後の地下水流出成分  $y'_1(t)$  を得る。

$$\text{Bias} = \text{Min } y(t') - \alpha \sum \omega_k y_{t'-k}$$

$t'$  は  $\text{Min } y(t)$  時の  $t$  とする

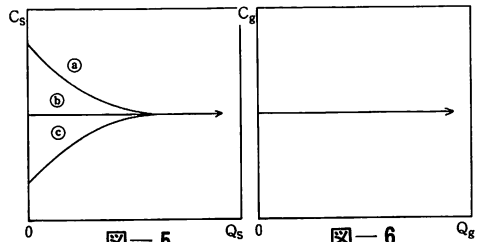
$$y'_1(t) = y_1(t) + \text{Bias} \quad (11)$$

### 3. 解析結果および考察

今回解析の対象とした水質データは、秋田県雄物川流域仁井田浄水場原水着水池における、昭和55年7月8日から8月7日にわたる一日一回の連続水質調査結果である。流量の決定にあたっては、やや上流に位置する建設省椿川流量観測所での値を用いた。

#### 3-1 流出成分分離

流出成分分離日数  $T_c$  の決定には、2-1で述べた手法のうち、流量データだけで決定される、a) 自己回帰係数 (AR係数) によるものと、b) 自己相関係数によるものの二種で検討を行なった。なお安定した結果を得るために、極力データ数を多くとることとし、流量データは連続採水調査期間を前後にはさむ、



図一 5

図一 6

各流出成分と成分濃度との関係の模式図

表-2 最小二乗法により推定された各成分濃度

| 水質項目   | 表面流出成分濃度 $C_s$ | 地下水流出成分濃度 $C_g$ | 相関係数  |
|--------|----------------|-----------------|-------|
| 浮遊物質   | 117.0          | - 4.3           | 0.896 |
| 全COD   | 6.5            | 0.3             | 0.940 |
| 溶解性COD | 2.5            | 0.9             | 0.972 |
| アルカリ度  | 9.5            | 13.1            | 0.954 |
| 総硬度    | 16.9           | 24.0            | 0.962 |
| 塩素イオン  | 9.3            | 13.5            | 0.967 |

5月1日から10月31日までの184日間として計算を行なった。表-1, 図-3は、それぞれ流量時系列を自己回帰モデルに適用した場合の各係数と、自己相関係数の変化を示したものである。なお自己回帰係数の同定にあたっては、Yule-Walker法により行なった。自己回帰係数から判断する場合、およそ  $T_c = 4$  日程度、また自己相関係数からではおよそ  $T_c = 7$  日程度と思われた。今回は他の文献<sup>(3)</sup>などから、 $T_c = 7$  日 (分離周波数 0.1428 cycle/day) として検討を進めた。

このように  $T_c$  が決定されることにより、先の(9)式の数値フィルターにより各成分の分離を行なう。なお減衰係数  $\delta$  として2.5を仮定した。図-4にはこの分離結果を示した。流量ピーク時には表面流出成分が、減水時には逆に地下水流出成分がそれぞれ卓越する様子がみられる。また一般に、地下水流出成分の変動が比較的緩慢であることもわかる。

3-2 河川水質時系列への応用

表面流出成分と水質濃度との関係を考える場合、図-5に示した(a)(b)(c)の三つのパターンが考えられる。(a)は降雨初期にその濃度が著しく高くなるもので、また(c)は逆にきわめて小さな値を示すものである。これは、表面流出が降雨のあった地域の地質的

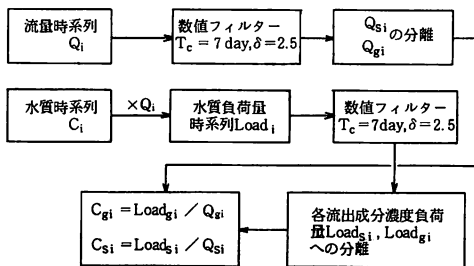


図-7 各流出成分濃度  $C_s$ ,  $C_g$  推定の概要

な、あるいは物理的な特性に大きな影響を受け、また各水質毎にもそれぞれ溶出則が異なるなど、複雑な過程を経る結果と思われる。

また地下水流出成分と水質濃度(特に溶解性物質)とでは、一般に図-6に示した流出パターンが予想される。これは地下水流出成分は表面流出成分にくらべ、比較的その量的な変化が緩慢であり、またその流出過程もさほど変化しないと考えられるためである。

流出成分分離結果を水質に応用するため、次の収支式を与える。

$$\left. \begin{aligned}
 C_s \cdot Q_s + C_g \cdot Q_g &= C \cdot Q \\
 Q_s + Q_g &= Q
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$Q_s$ : 表面流出成分  
 $Q_g$ : 地下水流出成分  
 $Q$ : 河川流量  
 $C_s$ : 表面流出成分の水質濃度  
 $C_g$ : 地下水流出成分の水質濃度  
 $C$ : 河川水の水質濃度

いま得られた  $Q, Q_s, Q_g$  の値から  $C_s, C_g$  を推定する方法として、連続する観測間で連立させて解くもの、最小二乗法的に求めるものなどが考えられる。初めの方法は一日毎の濃度変化が推定できるもの、實際上今回扱った流量データが日単位のものであったために、その分散が大きすぎ、安定した結果は得られなかった。具体的には、各推定濃度がマイナス値をしめすなど、現実にはありえない結果が得られ、用いることはできなかつた。

最小二乗法により各成分濃度を推定したものを表-2に示す。表面流出に関与の深い浮遊性物質 (SS,

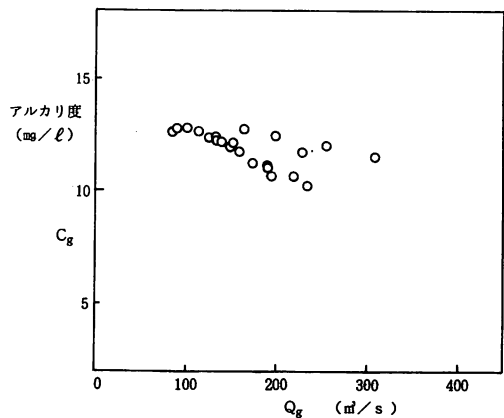


図-8 地下水流出系におけるアルカリ濃度変化

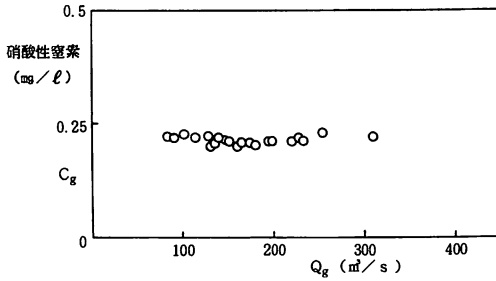


図-9 地下水流出系における  $\text{NO}_3\text{-N}$  濃度変化

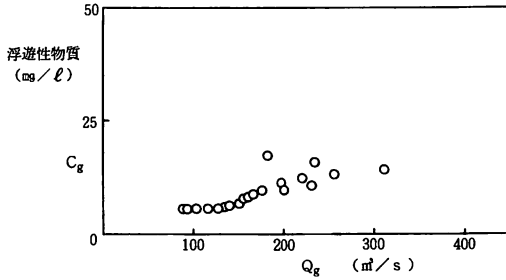


図-10 地下水流出系における SS 濃度変化

COD 等)は  $C_s > C_g$  の傾向が、また地下水流出成分に関与の深い溶解性物質 (アルカリ度、総硬度等) は  $C_s < C_g$  の傾向がみられた。

ところで地下水流出成分濃度  $C_g$  は、土中成分との接触時間、経路および水温等に大きく左右されるものと思われる。これらのうち接触時間、経路は年間を通じ大きな変化はみられないはずで、最終的には水温による河川水質の変化が予想される。実際季節別の河川水質変化は、この数年来続けてきた連続採水調査結果より明らかである。今回の報告では扱わないが、河川水質問題においては、こういった水温の影響といったものを考慮に入れる必要があるものとする。

次に、 $C_s, C_g$  を推定する方法として、直接水質時系

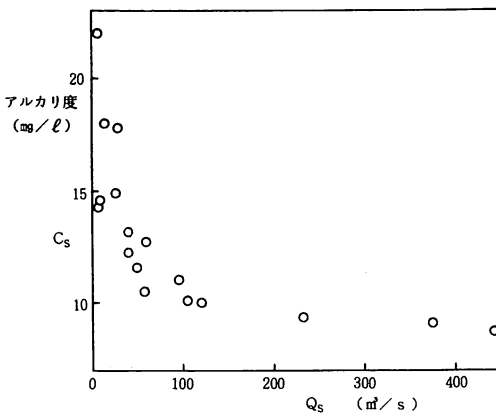


図-11 表面流出系におけるアルカリ濃度変化

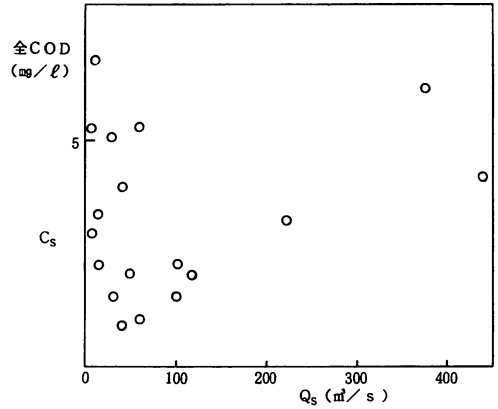


図-12 表面流出系における全COD濃度変化

列に数値フィルターをほどこすことによる、各流出成分濃度の分離を試みた。各水質毎の流出経路の相異により、流量と正、負の相関を示すものが現れる事は先に述べた。いまこの手法でアルカリ度、総硬度といった流量と負の相関を示すものを直接分離することは、その概念からみて不可能である。そのため、一時水質時系列を水質負荷量時系列 (濃度に流量を乗じたもの) に変換し、その後に数値フィルターをほどこすこととした。なお分離に際しての諸条件は、流量成分分離の際と同じである。この操作の概略を図-7 に示す。

図-8, 9, 10 は、以上により推定された地下水流出成分濃度  $C_g$  と、地下水流出成分  $Q_g$  とを各水質毎に普通目盛上にプロットしたものである。プロット数が少なく、またばらつきもあるものの、ほぼ一定と思われる硝酸性窒素といった項目がみられた。アルカリ度、SS では  $Q_g$  が増すにつれ  $C_g$  も変化する様子がみられるが、これは流出成分、もしくは流出成分濃度の分離がうまくゆかず、 $Q_g, C_g$  成分に若干

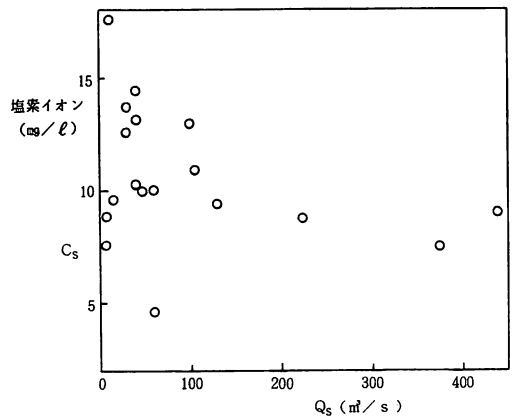


図-13 表面流出系における硫酸イオン濃度変化

の  $Q_s, C_s$  成分が混じった結果と思われる。他の項目、例えば溶解性 COD、塩素イオン等も同様な傾向であったが、これらは先の三例ほど明確なものとはならなかった。水質項目により、数値フィルターがうまくはたらくものとそうでないものがあるとされる。

図-11, 12, 13 は、同様に表面流出成分濃度  $C_s$  と、表面流出成分  $Q_s$  との関係を示したものである。アルカリ度の場合、先の図-4 の④のパターンであることがわかるが、他の二例はいずれかはっきりとはせず、逆にすべてのパターンを含んでいるとも推定される。これは対象とした流域が極めて広いために、さまざまなパターンを示す流域を流下してきたものが、最終的に合計されて観測された結果と思われる。しかしながら水質項目により、はっきりとパターンが現れるものもあり、なぜこの様な差異が生じるかは不明である。

#### 4. おわりに

以上数値フィルターの考えを水質時系列に応用し、間接的にも各流出成分濃度を推定することができた。広く一般に考えられている流域内での各成分濃度の挙動も、二、三の例で確認することができた。

しかし今回行った方法では、人為的な操作が入り込む箇所があり、多少の問題が残るものと思われる。さらに今回対象とした流域が約 46 万  $\text{km}^2$  と広大で、数値フィルターの水質時系列への適用性の良否を検討するという意味では不適當だったかもしれない。山間地の中小河川を選ぶなど、流域を限定するならば、よりはっきりとした結果が得られたもの

と思われる。また、今回得られた各成分濃度は、あくまで推定の域をぬけ出ないわけで、いずれ何らかの形で実際に測定される必要があるものと思われる。

以上が今後の検討課題と思われる。今後さらに多くの水質時系列にこの手法を応用し、より詳細について検討していく予定である。

#### 参考文献

- 1) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，1977
- 2) 岩井重久：水質データの統計的解析，森北出版，1980
- 3) 日野幹雄，長谷部正彦：流量時系列のみによる流出解析について，土木学会論文報告集第 300 号，pp. 43~56，1980-8
- 4) 高橋裕，吉野昭一，小池俊雄：積雪面積情報の利用による流域積雪水量推定に関する研究，第 27 回水理講演会論文集，pp. 359~364，1983-2
- 5) 日野幹雄，長谷部正彦：地球化学的手法と逆探法を併用した流出系の成分溶出法則の推定について，土木学会論文報告集第 319 号，pp. 87~96，1982-3
- 6) 長谷部正彦，日野幹雄：流量時系列のみによる降雨時系列，流域の流出特性および流出分離の推定について，第 23 回水理講演会論文集，pp. 193~198，1979-2
- 7) 日野幹雄，長谷部正彦：融雪時期の流出解析，第 26 回水理講演会論文集，pp. 177~182，1982-2