

部分空どうを伴う厚翼の特異点解法

伊 藤 惇

Singularity Method of Partially Cavitating Thick Hydrofoil

Jun ITO

(昭和56年10月31日受理)

In this paper, new analytical method on partially cavitating hydrofoils of large thickness and camber is presented. Main contents are summarized as follows.

- (1) A simultaneous integral equation with respect to the vortex and source distributions is derived from the pressure constancy condition on the cavity and tangential flow condition over the foil surface.
- (2) Subdividing the foil surface into the small intervals of uniform vortex distributions and developing the source distributions in series so suitably as to include the flow singularity peculiar to partial cavity, a simultaneous integral equation can be reduced to simultaneous linear algebraic equations.
- (3) As the concrete examples, numerical calculations are made for the partially cavitating hydrofoil of CLARK Y 14% and NACA 0015 section to illustrate some notable features. And also some comparisons are made to examine the present method with the former theory and the available experimental data.

1. 緒 言

水力機械や船用プロペラの羽根のボス側など厚みの大きい翼形では、薄翼理論を応用した従来の解析法^(1,2)では精度の低下が著しく、またこのように翼厚が大なる場合には空どう初生点が翼形前縁に一致せず、既存解析法が適用できない。山崎・高橋による厚翼の解法⁽³⁾が最近公表されたが、特異点を翼弦上に分布させていること、空どうの初生点を翼形前縁に一致すると仮定していることなど本質的には薄翼理論の範ちゅうを出るものではなく、この種の既存研究は皆無と言ってよい。したがってプロペラ・キャビテーションの発生領域の推定に関する研究^(4,5)などでは、プロペラのチップ側の薄翼については既存理論⁽²⁾が用いられているが、ボス側の厚みの大なる翼形では、経験的な揚力等価法が用いられているにすぎない。この方法は空どう長さに制限があり、翼形背面の圧力分布が必要であるなどの欠点があるだけでなく、あくまでも暫定的な経験則であることから、部分空どう厚翼の解法が強く要請されるに到っている。

本論は、翼形表面上に渦を分布させる精度の高い

解析手法⁽⁶⁾を、背面上任意点より部分空どうが発生している厚翼に応用したもので、その解析手順は以下ようになる。(i)部分空どうを伴う二次元厚翼まわりの流れを、翼形形状は渦分布、空どうは吹き出し分布で置き換えることにより表示し、これによる誘導速度場が導かれた。(ii)翼形表面上の分割された小区間では一様に分布すると仮定した渦層モデルを採用し、空どうを表す吹き出し分布は空どう先端および後端模型を導入できるように級数展開した。(iii)翼面上の任意点における渦の強さはその点の接線速度に等しいという接線流れの条件と、空どう部分における圧力一定条件より連立積分方程式が誘導され、付帯条件として、閉鎖、半閉鎖、開放形の空どう後端模型の条件が導かれた。(iv)これらの積分方程式は各小区間の渦の強さと吹き出し分布の級数の係数を未知数とする連立一次代数方程式に直され、決定された渦および吹き出し分布より、空どう特性および翼形特性が算出された。

以上の解法の実例として、NACA0015, CLARK Y 14%の二種の翼形について、空どう後端の流れ模型ごとの空どう特性と翼形特性を明らかにした。

部分空どうを伴う厚翼の特異点解法

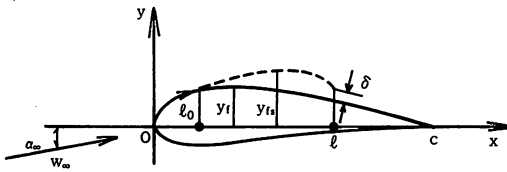


図1 二次元厚翼

2. 基礎式

2.1 誘導速度と境界条件

図1に示すような背面上任意点から部分空どうが発生する厚翼において、翼面上に $\gamma(s)$ なる渦分布と $m(s)$ なる吹き出し分布を置くと、任意点 x, y における誘導速度の x, y 成分 u, v は各々次のようになる。

$$u(x, y) = \oint_K I_E(x, y; x(s), y_f(s)) \gamma(s) ds + \int_C R_E(x, y; x(s), y_f(s)) m(s) ds \quad (1)$$

$$v(x, y) = -\oint_K R_E(x, y; x(s), y_f(s)) \gamma(s) ds + \int_C I_E(x, y; x(s), y_f(s)) m(s) ds \quad (2)$$

ここに K は翼形表面に沿う積分路、 C は空どう発生領域における翼形表面に沿う積分路である。また I_E, R_E は次式で与えられ、 s は翼表面に沿う座標である。

$$I_E = \frac{1}{2\pi} \frac{y - y_f(s)}{\{(x - x(s))^2 + \{y - y_f(s)\}^2\}} \quad (3)$$

$$R_E = \frac{1}{2\pi} \frac{x - x(s)}{\{(x - x(s))^2 + \{y - y_f(s)\}^2\}} \quad (4)$$

さて、翼面上任意点における接線速度 w_k は

$$w_k = w_{\infty s} + w_s(s) + \frac{\gamma(s)}{2} \quad (5)$$

ここで $w_{\infty s}, w_s$ は一様流および誘導速度の翼形表面における接線方向成分でそれぞれ次のようになる。

$$w_{\infty s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_f}{dx}\right)^2}} w_{\infty} \left(\cos \alpha_{\infty} + \frac{dy_f}{dx} \sin \alpha_{\infty} \right) \quad (6)$$

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_f}{dx}\right)^2}} \left\{ u(s) + \frac{dy_f}{dx} v(s) \right\} \quad (7)$$

境界条件は翼面上では接線流れの条件、すなわち翼面上の任意点における接線速度がその点における渦の強さに等しいという条件により与えられる。すな

わち、

$$w_k(s) = \gamma(s) \quad (8)$$

空どう部分ではいたるところ圧力一定という条件から

$$w_k = w_{\infty} \sqrt{1 + \sigma} \quad (9)$$

2.2 積分方程式と付帯条件

τ をパラメータとして翼形状を

$$x = x(\tau), y_f = y_f(\tau) \quad (10)$$

とすると次の関係が成立する。

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}_f^2(\tau)} \cdot d\tau \quad (11)$$

$$\text{ここに、} \dot{x}(\tau) = \frac{dx}{d\tau}, \dot{y}_f(\tau) = \frac{dy_f}{d\tau} \quad (12)$$

式(11), (12)の関係をを用い、式(5)を境界条件式(8), (9)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \dot{x}(\tau) \cos \alpha_{\infty} + \dot{y}_f(\tau) \sin \alpha_{\infty} = \frac{1}{2} \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}_f^2(\tau)} \cdot \\ & \left\{ \lambda \frac{\gamma(\tau)}{w_{\infty}} + (1 - \lambda) \sqrt{1 + \sigma} \right\} + \sqrt{1 + \sigma} \dot{y}_f(\tau) \int_C \\ & R_E(\tau, \tau') - \dot{x}(\tau) \int_C I_E(\tau, \tau') \sqrt{\dot{x}^2(\tau') + \dot{y}_f^2(\tau')} \cdot \\ & d\tau' + \dot{y}_f(\tau) \int_{K-C} R_E(\tau, \tau') - \dot{x}(\tau) \int_{K-C} I_E \\ & (\tau, \tau') \frac{\gamma(\tau')}{w_{\infty}} \sqrt{\dot{x}^2(\tau') + \dot{y}_f^2(\tau')} d\tau' - \dot{y}_f(\tau) \int_C I_E \\ & (\tau, \tau') + \dot{x}(\tau) \int_C R_E(\tau, \tau') \frac{m(\tau')}{w_{\infty}} \sqrt{\dot{x}^2(\tau') + \dot{y}_f^2(\tau')} \\ & \cdot d\tau' \end{aligned} \quad (13)$$

ここに $K-C$ は空どう部分を除いた翼形表面に沿う積分路である。式(13)は翼形背面上任意点より部分空どうが発生する単独厚翼における流れ場の基礎式であり、翼面上では $\lambda = 1$ 、空どう部分では $\lambda = 0$ として得られる連立積分方程式である。未知関数は、 $m(\tau), \gamma(\tau)$ であり $\sqrt{1 + \sigma}$ も未知数に含まれる。付帯条件としては次の二つがある。

- (i) 空どう後端模型を規定する条件
- (ii) 空どう後端におけるクッタの条件

3. 空どう初生点

3.1 空どう初生点の位置

空どう初生点の位置は実験結果を参照して決定することができるが、一般には何らかの方法で予め推定する必要がある。最近の実験報告^(7,5)によれば、

空どうは層流はく離領域内で発生し成長するということから、層流境界層の計算によりはく離点を求めこれを空どう初生点とするのが正当である。また層流はく離を起さない場合は乱流への遷移点が空どう初生点と良く一致しているとの報告⁽⁸⁾があることから、これを空どう初生点として解析を進めるべきである。また空どう初生点と最小圧力点との距離は比較的小さいことから、第一近似としては非空どう時における表面圧力分布の最小圧力点を空どう初生点と仮定してもそれによる誤差は小さいと考えられる。

3・2 空どう初生点における自由流線の方向

空どう初生点が翼形表面上任意点にある場合は、空どう流線が空どう初生点においてどの方向に発生するかが問題となる。超空どう流れに関しては、前縁に丸みを持つ翼形を扱った村井らの解法⁽⁹⁾では空どう初生点において自由流線が翼形の接線方向に発生する滑らかなはく離の条件を導入しており、二次元軸対称流を扱った Tulin の解析法⁽¹⁰⁾ではさらに曲率が連続である条件が加えられている。本論で扱っている部分空どうの場合に対しても、これらの空どう先端モデルをそのまま導入できるかどうかは今後の研究課題であろうかとおもわれるが、一応村井ら⁽⁹⁾と同じ流線傾斜が連続するなめらかなはく離の条件を導入し特性解析を行った。なお、一般的には次のような場合が考えられよう。

(i) 滑らかなはく離の条件; $\left(\frac{dy_{fs}}{dx}\right)_{\ell_0} = \left(\frac{dy_f}{dx}\right)_{\ell_0}$ (14)

(ii) 有限傾斜はく離の条件; $\left(\frac{dy_{fs}}{dx}\right)_{\ell_0} = \tan\{\tan^{-1}\left(\frac{dy_f}{dx}\right)_{\ell_0} + \alpha_0\}$ (15)

(iii) 特異性はく離の条件; $\left(\frac{dy_{fs}}{dx}\right)_{\ell_0} = \infty$ (16)

ここで、 y_{fs} , y_f はそれぞれ自由流線および翼形の y 座標であり、 α_0 は初生点における翼形の接線方向と自由流線のなす角である。

4. 解 法

4・1 空どう先端および後端の流れ模型と級数表示

空どう先端で自由流線がその点の翼面の接線方向に発生する滑らかなはく離の条件が成立する場合は、空どう先端で吹き出し分布の強さは零である。また接線方向に対してある角度をなす有限傾斜はく離の

条件が成立する場合は吹き出し分布は有限な値をとる。さらに接線方向に対して90°以上ではく離する場合は吹き出し分布の強さに特異性をもつ。

空どう後端における流れ模型は文献2と同様に閉鎖形、半閉鎖形、開放形の三種とする。

以上のことを考慮して空どうを表す吹き出し分布を次のような級数に展開する。

$$m(\tau) = w_\infty \left\{ M_0(\tau) + a_0 \rho \tan \frac{\tau}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\tau \right\}$$

$$x = \ell_0 + \frac{\ell - \ell_0}{2} (1 - \cos \tau) \quad (17)$$

ここで ρ は閉鎖、半閉鎖形模型では1、開放形模型では0とする。また $M_0(\tau)$ は、前節3・2の(i)~(iii)に対応して、

(i) $M_0(\tau) = 0$ (18)

(ii) $M_0(\tau) = \frac{1}{2} (1 + \cos \tau) \tan \alpha_0$ (19)

(iii) $M_0(\tau) = a_{-1} \cot \frac{\tau}{2}$ (20)

ここで a_{-1} は未定係数である。

なお、半閉鎖形模型における空どう後端厚みは次式で与えられ

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}} \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{m(x)}{w_\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_f}{dx}\right)^2} dx \quad (21)$$

開放形模型では式(21)の代りに、空どう後端部で圧力が不連続にならぬよう次式を用いる。

$$\gamma(\ell - 0) = \gamma(\ell + 0) \quad (22)$$

4・2 渦および吹き出し分布の決定

積分方程式(13)は翼形表面上の渦の強さ γ_i ($i = 1, 2, \dots, 31$) と吹き出しの級数の係数 ($a_0, a_1, a_2, \dots, a_{10}$) を未知数とする連立一次代数方程式に帰着されるが、 γ_i は翼面上小区間で一定値をとること、また級数の係数も定数であるのでこれらの未知数は積分の外に出し、各々ガウスの方法により数値積分した。標点の位置と数は以下のとおりである。

(i) 翼形前縁から空どう先端までの領域

$$\varepsilon_i = \frac{\pi}{2N} (2i - 1), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N = 5, \quad x = \frac{\ell_0}{2} \cdot (1 - \cos \varepsilon) \quad (23)$$

(ii) 空どう領域

$$\phi_j = \frac{\pi}{2M} (2j - 1), \quad j = 1, 2, 3, \dots, M = 10,$$

$$x = \ell_0 + \frac{\ell - \ell_0}{2} (1 - \cos \phi) \quad (24)$$

(iii) 空どう後端から翼形後縁までの領域

部分空どうを伴う厚翼の特異点解法

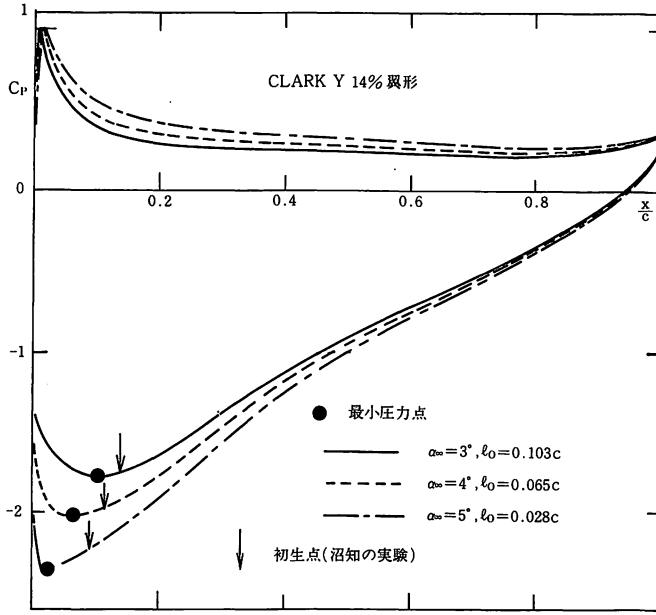


図2 非空どう時の最小圧力点と空どう初生点の既存実測値

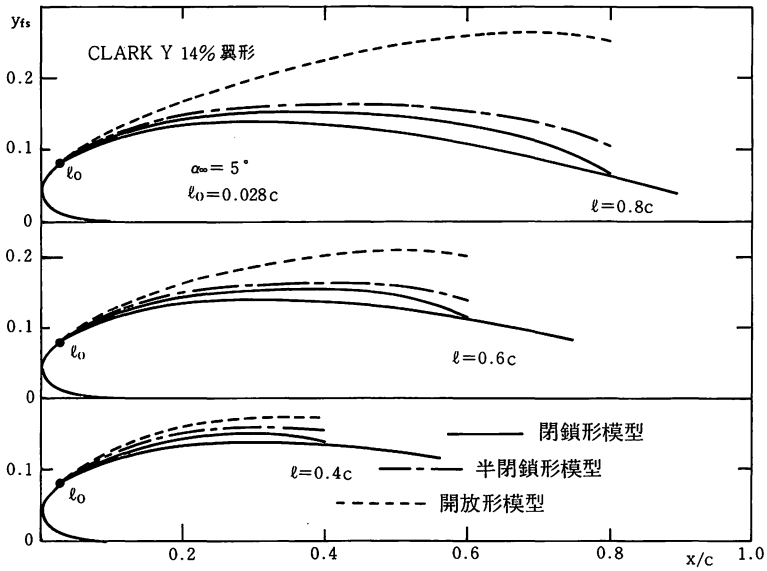
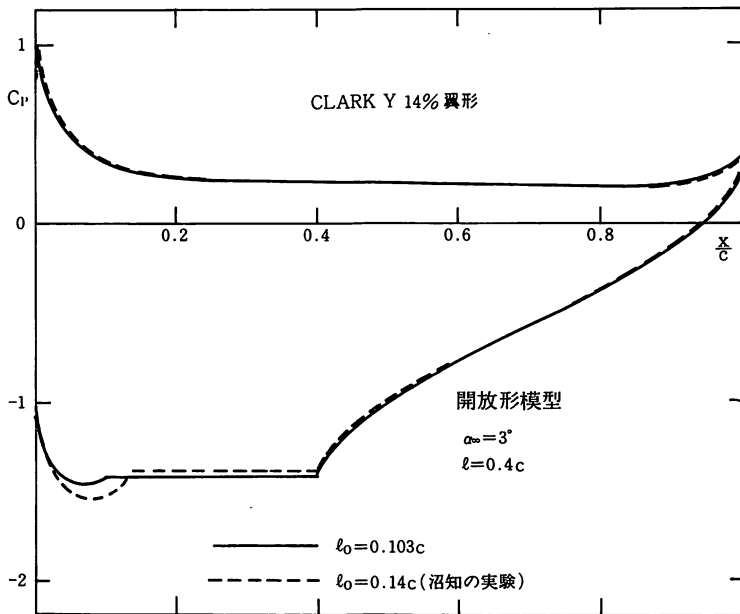
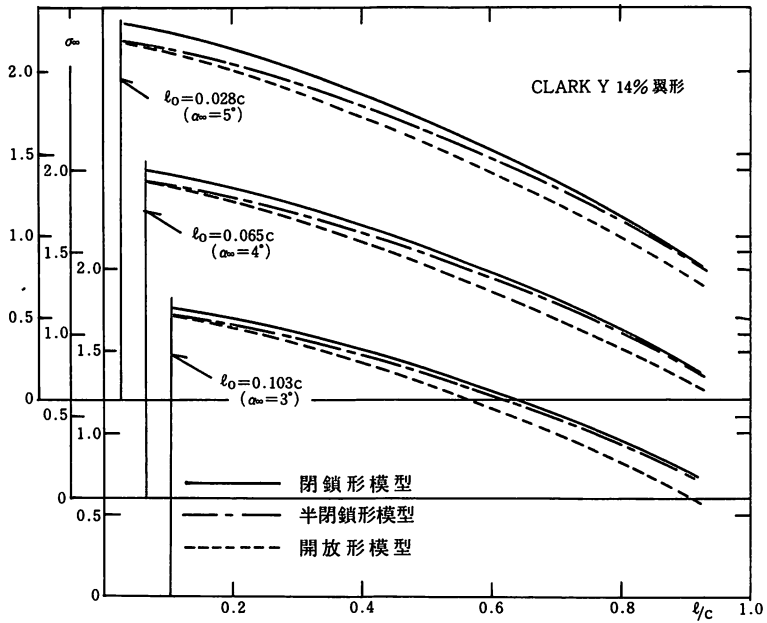


図3 自由流線形状



部分空どうを伴う厚翼の特異点解法

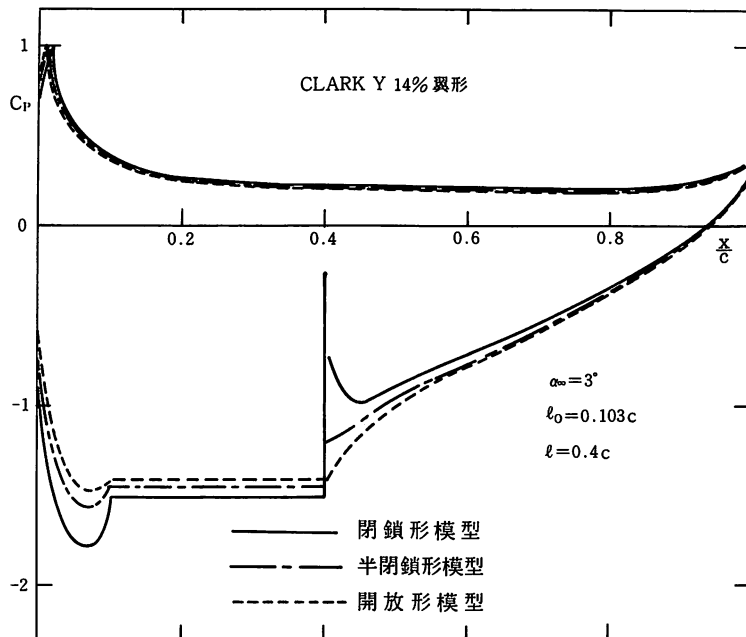


図6 圧力分布と空どう後端模型

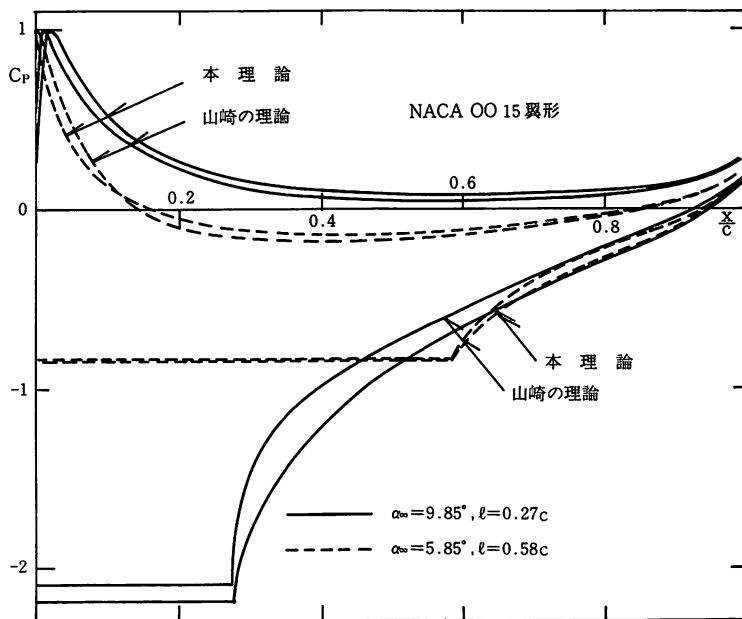


図7 既存理論との対比

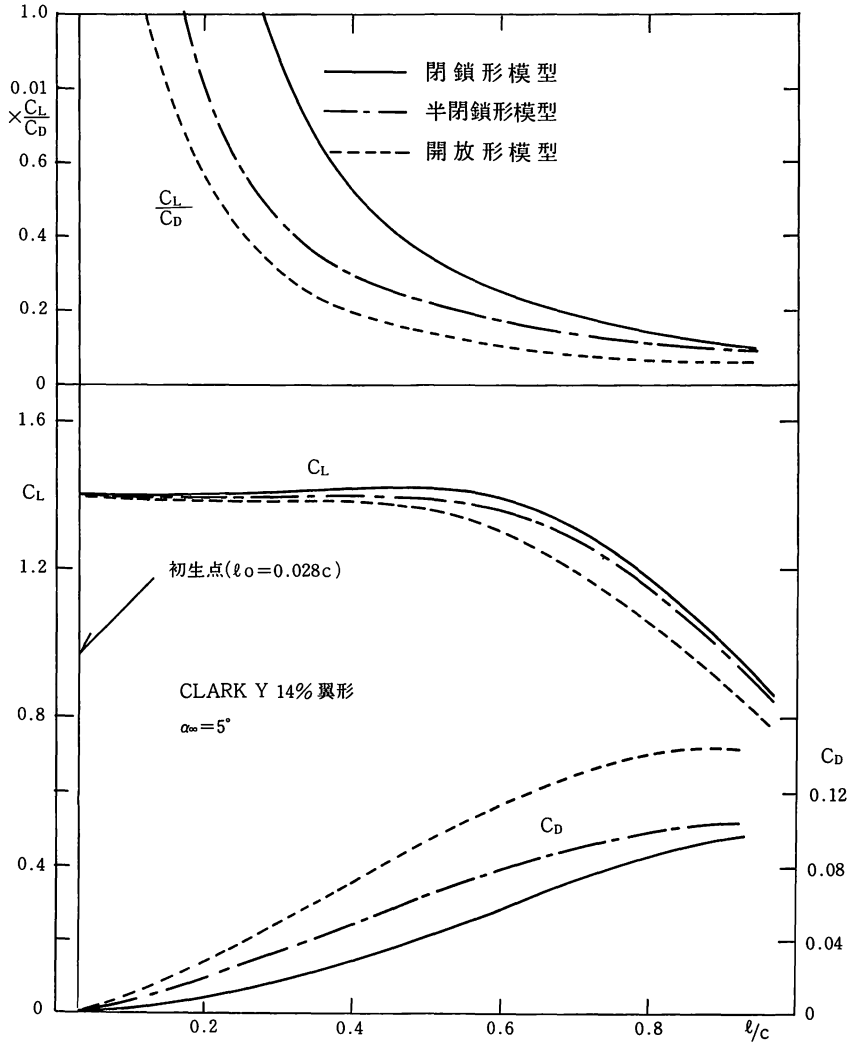


図8 揚力, 空どう抗力および理論揚抗比

$$\psi_k = \frac{\pi}{2L}(2k-1), \quad k=1, 2, 3, \dots, L=10,$$

$$x = l + \frac{c-l}{2}(1 - \cos \psi) \quad (25)$$

(iv) 翼形下面

$$\theta_m = \pi + \frac{\pi}{2I}(2m-1), \quad m=1, 2, 3, \dots, I=16,$$

$$x = \frac{c}{2}(1 - \cos \theta) \quad (26)$$

以上の標点から得られる代数方程式のほかに, 空どう後端の流れ模型を規定する条件として(21)あるいは(22), さらに翼形後縁におけるクッタの条件

$$\gamma(\psi_L) = \gamma(\theta_1) \quad (27)$$

の二つを加えて連立にして解けばよい。

5. 空どう特性および翼形特性

空どう内圧力は, 連立一次代数方程式の解である $\sqrt{1 + \sigma}$ から求められる。自由流線形状は決定された吹き出し分布から次式により得られる。

$$y_{fs}(\phi) = y_f(\phi) + \frac{1}{|x(\phi)|} \sqrt{\frac{x^2(\phi) + y_f^2(\phi)}{1 + \sigma}}$$

$$\cdot \int_0^\phi \frac{m(\phi')}{w_\infty} \sqrt{\dot{x}^2(\phi') + \dot{y}_f^2(\phi')} d\phi' \quad (28)$$

翼形表面圧力分布は

$$C_p(s) = \frac{P(s) - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho w_\infty^2} = 1 - \left(\frac{\gamma(s)}{w_\infty} \right)^2 \quad (29)$$

部分空どうを伴う厚翼の特異点解法

翼形に作用する流体力係数の x, y 成分は

$$C_x = \frac{1}{c} \int C_p(s) dy; \quad C_y = \frac{1}{c} \int C_p(s) dx \quad (30)$$

よって、揚力係数、空どう抗力係数は次のようになる。

$$C_L = C_y \cos \alpha_\infty - C_x \sin \alpha_\infty \quad (31)$$

$$C_D = C_x \cos \alpha_\infty + C_y \sin \alpha_\infty \quad (32)$$

6. 考 察

図2は、CLARK Y 14%翼形における非空どう時の圧力分布の計算結果を示すものであるが、その最小圧力点を黒丸で示してある。矢印は同じ翼形についての沼知による空どう初生点の実測値¹¹⁾を示すもので、最小圧力点に比べいづれも下流側にあるが、それらの差はそれほど大きなものではない。したがって本論の特性解析に採用した空どう初生点位置は、第一近似的ではあるが非空どう時の最小圧力点とした。また空どう初生点では滑らかに離れる条件を満足するものと仮定した。

図3はCLARK Y 14%翼形における自由流線形状を示すもので、空どう後端位置は0.4c, 0.6c, 0.8cの三種について示してある。空どう厚みあるいは空どう面積に及ぼす空どう後端模型の影響は大きく、この傾向は空どうが長いほど著しい。

図4は、迎角3°, 4°, 5°のCLARK Y 14%翼形におけるキャビテーション係数と空どう長さの関係を示したもので、空どう初生点はそれぞれ $l_0 = 0.103c, 0.065c, 0.028c$ である。空どう後端厚み、空どう長さが大なるほどキャビテーション係数は小さな値となり、空どう長さに対してはほぼ直線的に変化する。

図5は、迎角3°, 空どう後端位置0.4cの開放形模型におけるCLARK Y 14%翼形の表面圧力分布を示す。圧力一定の空どう部分より翼形前縁側に空どう内圧力より低い負圧のピークが認められ、これは加藤らの実験結果⁵⁾を裏付けるものである。なお、空どう初生点に沼知の実測値¹¹⁾を採用したものを点線で示した。図6は、CLARK Y 14%翼形の圧力分布に及ぼす空どう後端模型の影響を示す。空どう領域とそれより前縁側の負圧のピーク、空どう後端直後の近傍では模型による差が見られ、また空どう後端より下流部分と他の領域では模型の影響は逆の傾向を示す。空どう領域とそれより前縁側の負圧のピーク、空どう後端直後の近傍では模型による差が見られ、また空どう後端より下流部分と他の領域では模

型の影響は逆の傾向を示す。図7はNACA0015翼形について山崎らによる既存解析結果³⁾と比較したものである。両者は長い空どうの場合($l/c = 0.58, \alpha_\infty = 5.85^\circ$)は極めて類似の傾向を示すが、短い空どうの場合($l/c = 0.27, \alpha_\infty = 9.85^\circ$)は空どう後端下流で特に大きい差がみられる。この原因は山崎らの解法は翼弦上に特異点を分布させる近似解法であるため迎角が大きいことによる非線形効果を精度良く捕捉できないためと考えられる。

図8は、CLARK Y 14%翼形における揚力係数、空どう抗力係数、理論揚抗比と空どう長さの関係を示す。揚力係数は空どう初生段階からわずかに減少する傾向を示し、空どう後端位置が約半弦長のところで最大値となり、その後減少する。この最大値は閉鎖形模型が最大である。空どう抗力係数は、空どう長さの増大と共に増大する傾向を示す。また空どう後端厚みが大なるほど揚力係数は小さく、抗力係数は大きい。理論揚抗比は、空どう長さ、空どう後端厚みの減少と共に増大し、空どう長さが零で無限大に発散する。

7. 要 約

厚みの大きい翼形の背面上任意点より部分空どうが発生する場合の空どう特性ならびに翼形特性を求めるための解析法を提示した。本論の内容は以下のように要約される。

- (i) 翼形表面上に渦と吹き出しを分布させることにより誘導速度を求め、翼面における接線流れの条件と空どう部分における圧力一定条件から連立積分方程式が誘導され、かつこれが流れ場の基礎式となることが示された。
- (ii) 積分方程式は翼面上小区間で一様に分布する渦の強さと、空どう吹き出し分布の級数の係数を未知数とする代数方程式に帰着され、これらの解から空どう特性および翼形特性を求める解析法が提示された。
- (iii) 空どう形状、キャビテーション係数、圧力分布、揚力、空どう抗力などが空どう後端模型ごとに明らかにされた。また、本解法の特別な場合である前縁はく離を仮定したものについて、既存の近似解法³⁾と比較しその精度低下の程度を明らかにした。

なお本論は、東北大学工学部機械工学科流体力学講座に研究員として在籍中に行われたものの一部で、ご指導いただいた西山教授に感謝します。

参 考 文 献

1) Acosta, A.J., ONR Rep., E-19.9 (1955-10), 1; Geurst, J.A., Int. Shipb. Progr., 6-60(1959-8), 369; Geurst, J.A. and Verbrugh, P.J., Int. Shipb. Progr., 6-61 (1959-9), 409; Wade, R.B., J.Ship of Research, 20-27(1967-3), 20; Nishiyama, T. and Ota, T., Trans. ASME, Ser. D, 93-4 (1972-12), 550; 花岡, 日本造船学会論文集, 117 (昭40-6), 12; Uhlman, J.S., DTMB. Rep., 83481-2 (1977-7).

2) 西山・伊藤, 日本機械学会論文集, 43-370 (昭52-6), 2165; Technology Rep. of Tohoku Univ., 42-1 (1977-6), 27.

3) 山崎・高橋, 日本造船学会論文集, 146 (昭54-12), 112.

4) 右近, 船舶技研報告, 16-6 (昭54-11), 83.

5) 加藤ほか3名, 日本造船学会論文集, 146 (昭54-12), 82.

6) 西山・矢野目, 日本機械学会論文集, 45-394 (昭54-6), 763.

7) Arakeri, V.H. and Acosta, A.J., Trans. ASME, Ser. I, 95-4 (1973), 519.

8) Oossanen, P. van, Int. Shipb. Progr., 22-254 (1975-1)

9) 村井・甲, 東北大学速研報告, 24-245 (昭43, 44), 289.

10) Tulin, M.P., Cavitation in Real Liquids, Elsevier Publishing Company (1964), 63.

11) 沼知ほか2名, 東北大学速研報告, 1-2 (昭24), 17.

付 録 (式20の誘導)

翼表面に垂直な座標 n の自由流線を n_{fs} とすると連続の理から次式が成立する。

$$w_{\infty} \sqrt{1 + \sigma} \cdot n_{fs}(s) + m(s) ds = w_{\infty} \sqrt{1 + \sigma} \cdot \left(n_{fs}(s) + \frac{dn_{fs}}{ds} ds \right) \quad (33)$$

ゆえに n_{fs} は,

$$n_{fs}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}} \int_{s_0}^s \frac{m(s)}{w_{\infty}} ds \quad (34)$$

ここに s_0 は空どう初生点である。自由流線上の同じ点における y 方向厚み y_d は

$$y_d = \sqrt{1 + \left(\frac{dy_f}{dx} \right)^2} n_{fs} \quad (35)$$

したがって求める自由流線形状 y_{fs} は

$$y_{fs} = y_f + \sqrt{1 + \left(\frac{dy_f}{dx} \right)^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}} \int_{x_0}^x \frac{m(x')}{w_{\infty}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy_f}{dx'} \right)^2} dx' \quad (36)$$

あるいは,

$$y_{fs}(\phi) = y_f(\phi) + \frac{1}{|\dot{x}(\phi)|} \sqrt{\frac{\dot{x}^2(\phi) + \dot{y}_f^2(\phi)}{1 + \sigma}} \cdot \int_0^{\phi} \frac{m(\phi')}{w_{\infty}} \sqrt{\dot{x}^2(\phi') + \dot{y}_f^2(\phi')} d\phi' \quad (28)$$