碁盤目型管群の熱伝達に関する数値解析
(低レイノルズ数領域の場合)

相場真也・土田　一・千葉　宏*

Numerical Prediction of Viscous Flow and Heat Transfer in In-Line Tube Banks

Shinya AIBA, Hajime TSUCHIDA, Hiroshi CHIBA

(昭和55年10月31日受理)

1. 緒　　言

近時，省エネルギー，新エネルギーの開発が社会的に重要な問題となっている。エネルギーの大部分を占める（90%以上）熱エネルギーの有効利用という観点から考えて熱交換器の比重はきわめて大きい。管群からなる熱交換器は構造が簡単，安価でしかも高圧に耐えうる（プレート型の場合は25kg/cm^{2}以下）ということから古くから用いられている。

管群の熱伝達，圧力損失に関する大多数の研究はレイノルズ数が比較的大きい場合に集中しているように思われる。これに反して低レイノルズ数領域での研究は比較的少なく，特定の円管間隔の場合に関してBergelinら[1]が管群の平均熱伝達，圧力損失等を実験的に明らかにしているにすぎない。

レイノルズ数が小さい場合は熱移動割合も低下するが圧力損失が少ないため，いわゆるポンピングパワーを軽減出来るということから，最近見直されその方面の研究も再開され始めてきたように思われる[2][3]。

一方，大型計算機の進歩により流れの中でも最も複雑なものの一つであると考えられる管群のまわりの流れ，熱伝達に関する数値解析が行われてきている[4]~[8]。低レイノルズ数領域における碁盤目型管群の解析はLe Feuvre[5]によって行われている。彼の結果によれば管群内の管間隔によって熱伝達率にかなりの相違がみられる。また，レイノルズ数（10≦Re≦100）によってほとんど変化しない。しかしながら，Žukauskasらの最近の実験結果[2][3]（熱流束一定）によれば上記レイノルズ数領域においてLe Feuvreの結果とはかなり異なっていることがわかる。すなわち，管間隔によって熱伝達率はさほど変化せず，かつレイノルズ数の増加とともに熱伝達率は増大している。

以上のような背景のもとに，著者らは上記範囲のレイノルズ数についてLe Feuvreと同様，直交座標系でGosmanら[9]によって開発された差分法を用いて数値解析を試みた。

主要記号

a	：	温度伝導率
C_p	：	定圧比熱
Cx	：	流れ方向の円管間隔
Cy	：	流れと直角方向の円管間隔
d	：	円管外径
Nu_β	：	局所ヌセルト数 $=\alpha_\beta \cdot d/\lambda$
p	：	圧力
Pr	：	プラントル数
q_w	：	熱流束
r_o	：	円管半径
Re_*	：	レイノルズ数 $=u_c \cdot r_o/\nu$
Re	：	レイノルズ数 $=u_c \cdot d/\nu$
u, v	：	x, y 方向の速度成分
x, y	：	座標
α_β	：	熱伝達率
β	：	円管前方岐点からの角度
ε	：	収束値
θ	：	温度
θ_o	：	モデル入口上端（図2のF点）温度
λ	：	熱伝導率
ν	：	動粘性係数
ρ	：	密度
Φ	：	変数
ψ	：	流れ関数
ω	：	渦度

* ローレルバンクマシン株式会社

添 字

m ： 平均
Nw ： 壁近傍の格子
p ： 格子
w ： 壁

2. 基礎方程式

解析モデルは図1に示すように2次元モデルを設定した。流れは非圧縮性，層流で流れ場，温度場とも充分発達した状況にあるものとする。Bergelin ら[1]の結果によると，ほぼレイノルズ数 Re = 100 付近から遷移が始まるように考えられる。したがって，Re は100以下について解析を行うこととした。壁面の熱的条件は熱流束一定とし，流体の物性値は温度に依存しないものと仮定した。

基礎方程式は連続，運動，渦度，エネルギーの各式からなり定常状態では次のように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\omega \quad \cdots\cdots(4)$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\lambda}{C_p\rho}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(5)$$

(2)(3)式の圧力項を消去し，渦度 ω で運動方程式を表わすと(6)式となる。

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(6)$$

流れ関数 ψ を導入すれば，u，v はそれぞれ次のようになる。

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \cdots\cdots(7)$$

したがって，渦度，運動，エネルギーの各式は(8)～(10)のようになる。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\nu\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\lambda}{C_p\rho}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで，r_o，u_c，θ_o で次のように無次元量を定める。

$$\left.\begin{array}{ll} X = x/r_o, & Y = y/r_o \\ \Psi = (\psi-\psi_w)/r_o u_c, & \Omega = r_o\,\omega/u_c \\ P_r = \nu/a, & Ⓗ = \lambda(\theta-\theta_o)/q_w r_o \end{array}\right\} \cdots(11)$$

(8)～(10)式を(11)式の無次元量で表わすと基礎方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}=-\Omega \quad \cdots\cdots(12)$$

$$\frac{\partial \Omega}{eX}\frac{\partial \Psi}{\partial Y}-\frac{\partial \Omega}{\partial Y}\frac{\partial \Psi}{\partial X}=\frac{1}{Re^*}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2}\right) \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\frac{\partial Ⓗ}{\partial X}\frac{\partial \Psi}{\partial Y}-\frac{\partial Ⓗ}{\partial Y}\frac{\partial \Psi}{\partial X}=\frac{1}{Re^*Pr}\left(\frac{\partial^2 Ⓗ}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 Ⓗ}{\partial Y^2}\right) \quad \cdots\cdots(14)$$

3. 格子分割と境界条件

格子の分割は図2に示したように円管の表面（角度10°ごと）上に格子点が存在するようにした。

無次元化された流れ関数，渦度，温度の境界条件

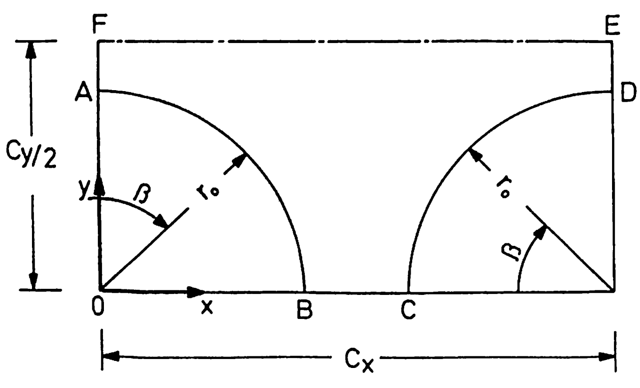


図1 座 標 系

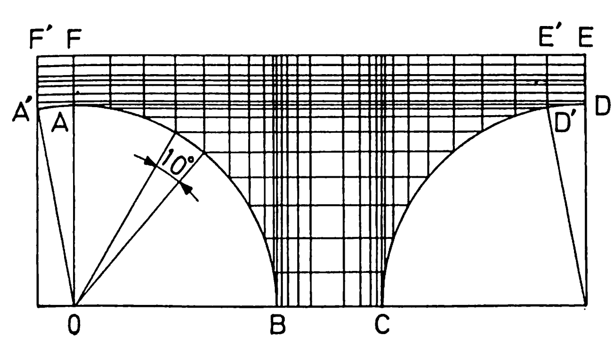


図2 格 子 分 割

は次のようにモデル化した。

出入口については充分発達した状態を仮定しているので図2に示したAF，ED上にある同一レベルの格子点の流れ関数，渦度は等しくたければならない。温度に関しては壁面からの放出熱量によりED上の値はAF上のそれより当然のことながら大きな値をとる。

また，上端境界面FE上では $\Psi_{FE} = c_y/d - 1$，$\Omega_{FE} = 0$，$\partial Ⓗ_{FE}/\partial Y = 0$ とし，下端BC上では $\Psi_{BC} = 0$，$\Omega_{BC} = 0$，$\partial Ⓗ_{BC}/\partial Y = 0$ とした。

壁面での境界条件は次のように設定した。$\Psi_w = 0$，$\Omega_w = -3(\Psi_{Nw} - \Psi_w)/N_w^2 - 0.5\,\Omega_{Nw}$，$Ⓗ_w = Ⓗ_{Nw} + Nw$ ここで，Nwは図3に示した壁面に垂直方向の距離を表わす。また，Φ_{Nw} (Ψ_{Nw}，Ω_{Nw} および $Ⓗ_{Nw}$) は壁面の格子点の関数 Φ_w に最も近い水平，垂直方向の内部格子点の関数 Φ_E，Φ_N を用いて(15)式のように補間した関数である。

$$\Phi_{Nw} = \{\Phi_N(\Delta X\cos\beta) + \Phi_E(\Delta Y\sin\beta)\}/(\Delta X\cos\beta + \Delta Y\sin\beta) \quad \cdots\cdots(15)$$

このように壁面条件の与え方はLe Feuvreとは異なる。

差分近似はGosmanら[9]が開発した風上差分法を用いた。この方法は対流項の非線形効果を弱め線形である粘性項にその分だけしわよせして，流れの不安定性を抑えるという特長をもつといわれている[10]。反面，誤差は大きいと考えられているようである。なお，この方法に関する誤差の論議はたとえば文献(10)で行なわれている。差分方程式は付録に示した。

数値解析はS. O. R. (successive over relaxation) 法によった。出入口の境界に関しては，千鳥型管群を扱ったLaunderら[7]と同一の手法を用いた。すなわち，図2でA′—F′のごとく架空の格子を設定し，

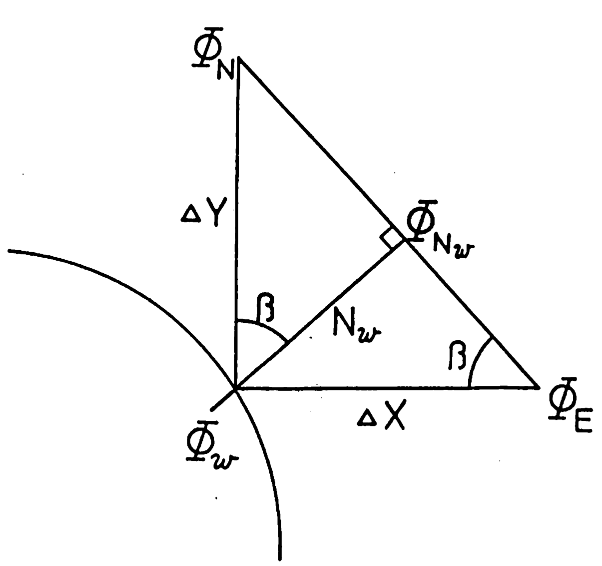


図3　円管表面上の変数

周期的に $\Phi_{A'F'} = \Phi_{D'E'}$，$\Phi_{AF} = \Phi_{DE}$ とした。なお，温度の計算に関しては Φ_{DE} を Φ_{AF} に置換する場合は $\Phi_{AF} = \Phi_{DE} - \Delta Ⓗ$，逆の場合は $\Phi_{DE} = \Phi_{AF} + \Delta Ⓗ$ の操作を行った。$\Delta Ⓗ$はモデルのエネルギー収支より(16)式で与えられる。

$$\Delta Ⓗ = \frac{\pi}{Pr\ \Psi_{FE}\, Re^*} \quad \cdots\cdots(16)$$

収束の条件は

$$\left|\frac{\Phi_P^{(n+1)} - \Phi_P^{(n)}}{\Phi_P^{(n+1)}}\right|_{max} \leq \varepsilon$$

とし，流れ関数，渦度については $\varepsilon = 10^{-3}$，温度の場合は 10^{-4} とした。

4.　計算結果と検討

取扱った円管間隔は $c_y/d = c_x/d = 1.25$，1.5の2種類の正方形配列である。これは既存の結果と比較検討を行うことを念頭において決定した。レイノルズ数Reは前述のように約100以上になると遷移領域に入る恐れがあるためRe＝10～100の範囲で計算を行った。また，プラントル数Prは1と10に関して計算している。

図4(a)(b)は $c_y/d = c_x/d = 1.5$ (以後1.5×1.5と略称する) の場合における結果を示したものである。(a)は流れ関数，(b)は渦度，(c)は温度の各分布である。条件はRe＝10，Pr＝10である。レイノルズ数が小さいため，ポテンシャルフローにおける流線にかなり類似した流線になっていることがわかる。しかしながら，$\beta = 155°$近傍ではく離し，25°付近に付着している様相を呈している。零流線以下においては，壁面とBC間で流速がきわめて遅い循環流の存在が認められる。渦度の分布(b)においては，はく離せん断層の付着点近傍の変化が特に大きく速度変化が大きいことを示している。(c)の温度分布においては，円管前後の温度分布はほぼ同一となっていて，したがって，熱伝達もほぼ円管前後で対称となることを示唆している (図8(b)参照)。また，述べるまでもなく，死水領域 (零流線以下) の温度が高く熱伝達率は $\theta = 90°$近傍よりかなり下まわっていることをあらわしている。

図5(a)(b)(c)はRe＝100の結果である。レイノルズ数が10の場合と比較して零流線は対称面EF側に接近し，$\beta = 130°$付近ではく離し，はく離せん断層は $\beta = 45°$近傍に付着している。また，Re＝10の場合と異なり零流線の形状は上側に湾曲し，死水領域は拡大し，この領域の速度は増大し熱伝達率も増加

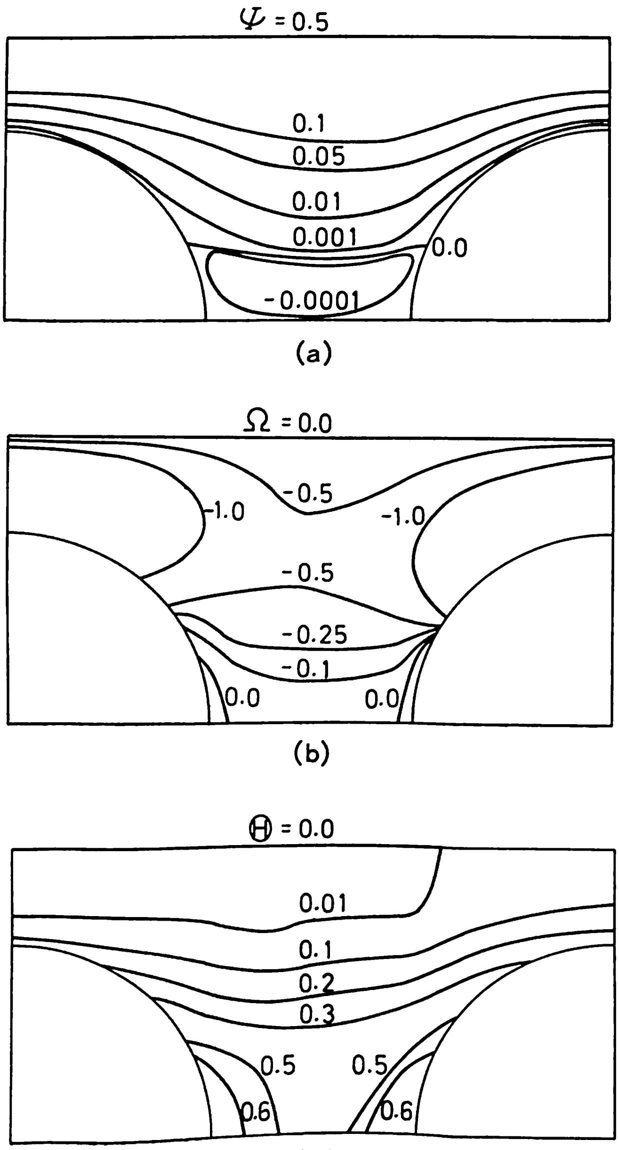


図 4　(a)流れ関数　(b)渦度　(c)温度；
1.5×1.5, Re＝10, Pr＝10.0

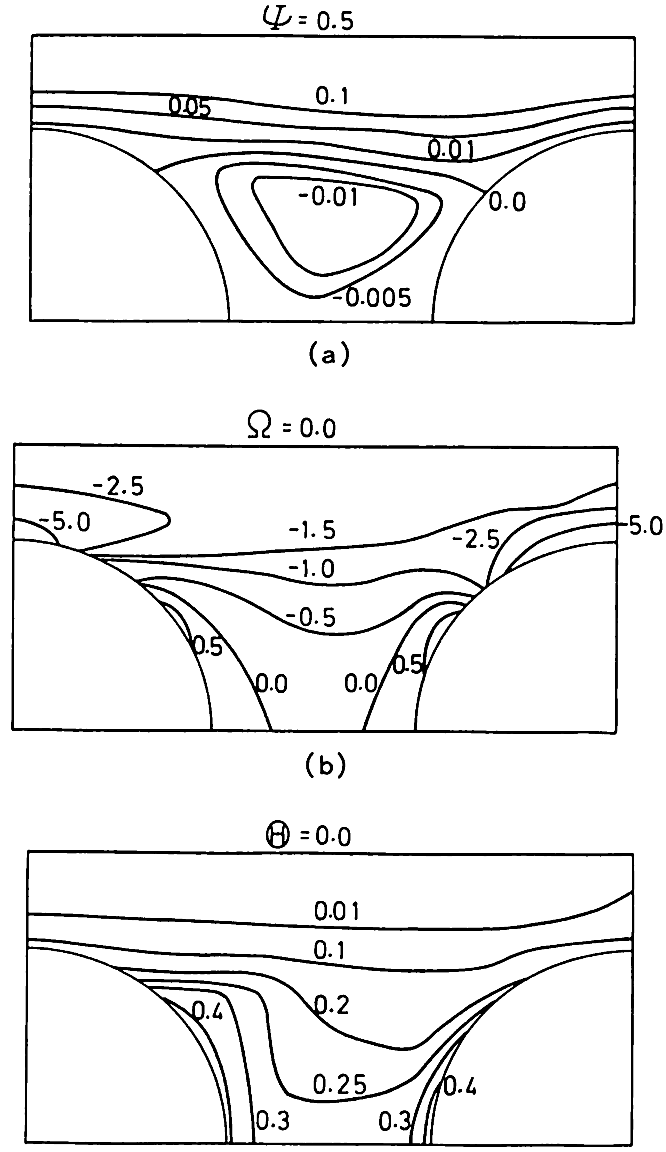


図 5　(a)流れ関数　(b)渦度　(c)温度；
1.5×1.5, Re＝100, Pr＝10.0

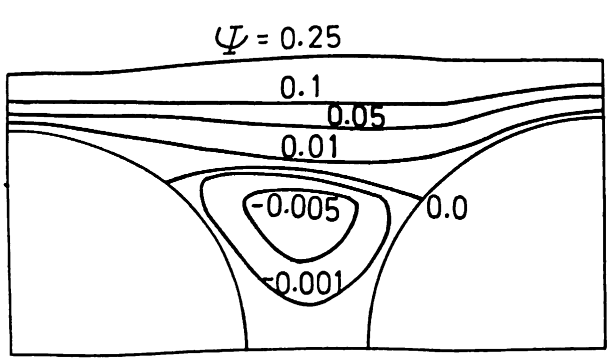


図 6　流 れ 関 数

1.25×1.25, Re＝100, Pr＝10.0

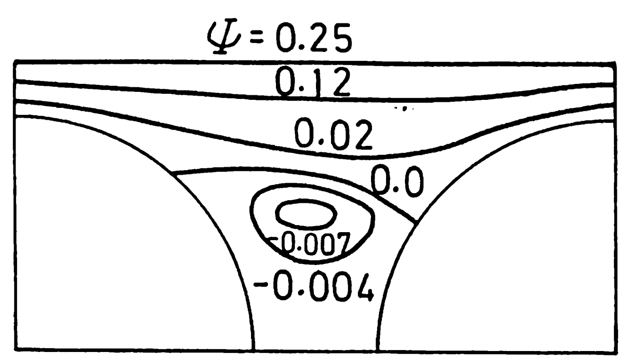


図 7　流 れ 関 数

1.25×1.25, Re＝100, Pr＝10.0,
Le Feuvre(5)

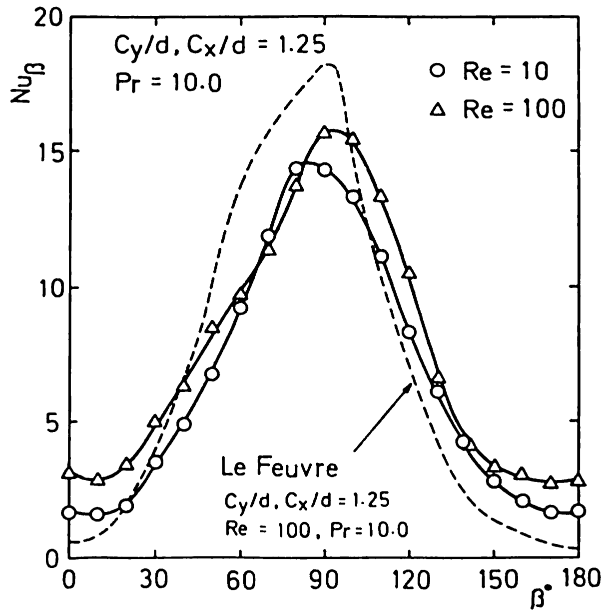
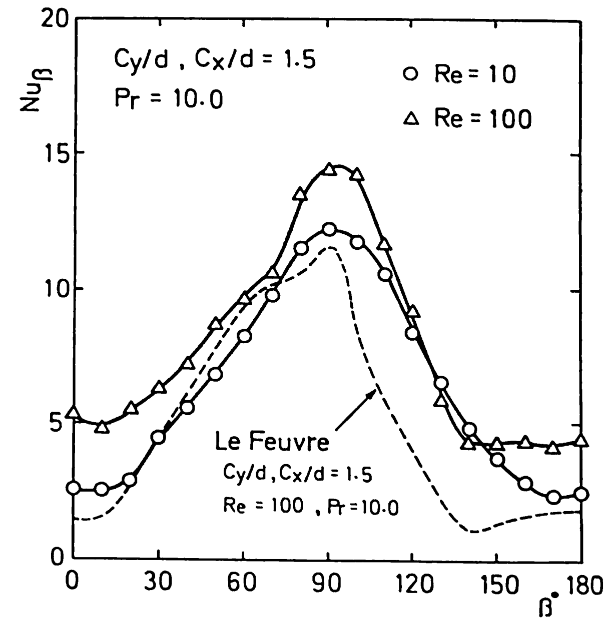
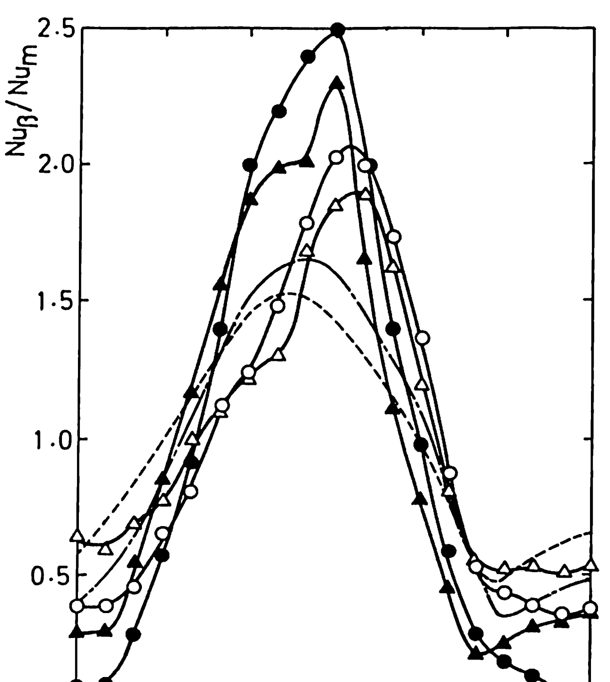


図8 (a) 局所ヌセルト数



(b) 局所ヌセルト数



(c) 局所ヌセルト数の既存値との比較

△ : 1.5×1.5, Re＝100, Pr＝10.0 } , qw＝一定
○ : 1.25×1.25, Re＝100, Pr＝10.0 }
▲ : 1.5×1.5, Re＝100, Pr＝10.0 } , Le Feuvre[5] (θw＝一定)
● : 1.25×1.25, Re＝100, Pr＝10.0 }
--- : 1.5×1.5, Re＝55, Pr＝7650 } , Žukauskas ら[2] の実験
-·- : 1.25×1.25, Re＝56, Pr＝9560 }

していることを示している（図8(b)）。渦度の分布(b)においては，本質的には図4(b)と同一である。温度分布(c)においては，等温線がRe＝10の場合より複雑となり，前述のように死水域での速度が大きくなり円管前後に値の低い等温線が入り込んできていることがわかる。また，$\beta \fallingdotseq 130°$以降の温度はほぼ一定となりRe＝10の場合とは，やや傾向を異にしている。

1.25×1.25の場合は，Re＝100の場合における流れ関数の分布のみを図6に示す。なお，比較のためにLe Feuvreの結果を図7に示す。1.5×1.5の場合（Re＝100）と比較して特に異なる点はみられず，はく離せん断層の付着点においてLe Feuvreの結果がやや円管前方岐点寄りになっている他は，ほぼ同一の流線といえる。

図8(a)(b)は局所ヌセルト数Nu_βの計算例である。1.25×1.25の場合はRe＝100の場合がRe＝10に比較して全般的に熱伝達が向上し，$\beta = 50°$近傍にせん断層の影響でその挙動がRe＝10の場合と異なっていることがわかる。破線はLe Feuvre（Re＝100, Pr＝10）の結果で円管後方及び$\beta = 50 \sim 100°$でかなり熱伝達率の分布が異なっている。しかしながら，定性的傾向はほぼ同一であると見なしてよいように思われる。1.5×1.5の場合は，1.25×1.25に比較して全般的に変化が緩慢でRe＝100では$\beta = 130°$以降Nu_βはほとんど変化していない。これは，壁面はは

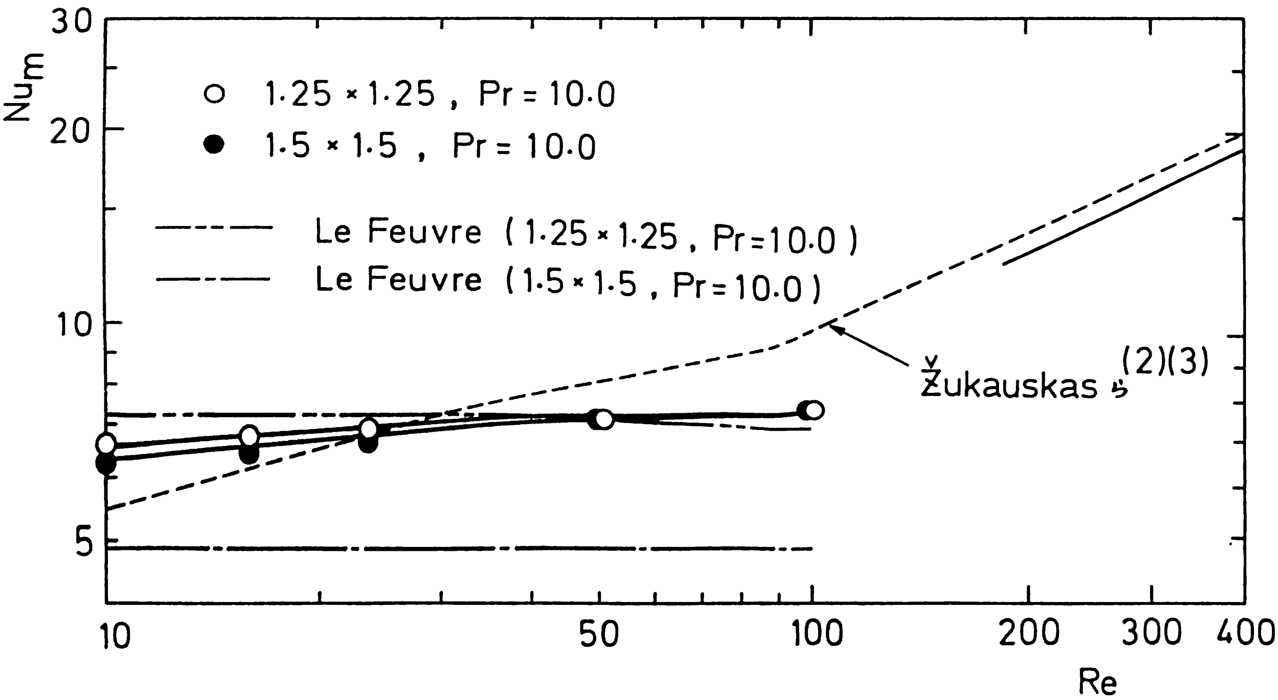


図 9　平均ヌセルト数

く離域に面していることを意味していると考えられる。Le Feuvreの結果は1.5×1.5の場合，著者らの結果に比較して全般的に熱伝達率が低くなっている点が注目される。なお，Pr＝1の場合はRe数が小さい場合収束が遅く，しかも熱伝達率が大きくなる結果が得られた。これは，Pr数が小さく壁近傍の格子分割が細かすぎるため誤差が大きく出ている[10]のではないかと考えている。Re，Pr数のかねあいで分割法を考慮する必要があり，問題を今後に残している。Le Feuvreの結果はPr数によってNu_βはほとんど変化しない。

図8(c)は著者らの結果とŽukauskasらの実験結果と比較したものである。レイノルズ数がいくぶん小さい（Re＝55～56）のでNu_β / Nu_mで比較した。最大熱伝達率を示す位置が本研究ではβ＝90°近傍に存在しているのに対して，彼のの結果は10～20°程度前方岐点寄りに存在している。また，β＝40～50°近傍にみられるふくらみは，はく離せん断層の付着の影響と思われるが，Žukauskasらの結果にはあらわれていない。これらの相違はPr数が異なることることによるものと考えられるが現在のところ判然としない。なお，Le Feuvreの結果は全般的に円管まわりの熱伝達の変化が大きく，円管前後ととくにβ＝90°近傍で著者らおよびŽukauskasらの結果とかなりの異なった分布を示していることがわかる。β＝90°近傍における相違は数値計算にあたって出入口の関数の周期的置換において，架空の格子の有無がその一因になっているのではないかと考えている。

図9は平均熱伝達率の結果を示したものである。1.25×1.25の場合が1.5×1.5の場合より数％程度高めの結果を示すにすぎず，Re数の増加とともにいくぶんではあるがNu_mは増大している。Žukauskasらの実験結果[2][3]を破線で示しているが数値的にはほぼ本研究結果と一致している。また，彼らの結果（1.5×1.5，1.25×1.25）は円管間隔による差異はほとんどみられず，Re数によるNu_mの変化割合が大きい。これに対して，Le Feuvre（θw＝一定）の結果では1.25×1.25の場合が1.5×1.5の場合より約50％も大きな結果を示し，しかもRe数によってNu_mはまったく変化しない。

なお，5行7列からなる碁盤目型配列（c_y/d＝1.7，c_x/d＝1.3）において第9列目の実験結果（——）も併せ示した。実験は水を用い，Re数は200以上であるため数値計算とは直接比較出来ない。しかしながら，Žukauskasらの結果（1.5×1.5）とほぼ一致していて管間隔の影響はそれほど大きくないことがわかる。これから計算領域まで拡大して推論することには危険を併うがLe Feuvreの結果にはやや問題があるように思われる。

5. 結　　言

低レイノルズ数領域における碁盤目型配列管群の層流熱伝達に関して流れ場，温度場が十分発達した場合の数値解析を行った。扱った条件範囲内で得られた主なる結果は次のようである。

(1) $c_y/d = 1.25$, $c_x/d = 1.25$の場合が$c_y/d = 1.5$, $c_x/d = 1.5$の場合より数%程度平均熱伝達率が大きい結果を示しているが，円管間隔による大きな差異はそれほどでないことがあきらかとなった。

(2) 平均熱伝達率に関する既存の実験結果と数値的にはほぼ一致することが確認されたが，レイノルズ数に対する依存性がやや小さいことが判明した。

(3) 局所熱伝達率分布に関しLe Feuvreの数値解析結果と比較して，$c_y/d = 1.5$, $c_x/d = 1.5$の場合は定量的にかなりの相違が認められた。

終りにのぞみ，秋田大学鉱山学部　山田　悦郎助教授には計算遂行にあたり一方ならぬ御援助をいただき心から感謝申し上げます。

付　　録

内部格子点を付図1のように定めればΦ_Pは(1)′式から求められる。

$$\Phi_P = C_E\Phi_E + C_W\Phi_W + C_N\Phi_N + C_S\Phi_S + D \quad \text{(1)'}$$

ただし，

$$C_i = (A_i + B_i)/\Sigma_{AB}, \quad (i = E, W, N, S)$$

$$D = d\cdot\frac{1}{4}(X_E - X_W)(Y_N - Y_S)/\Sigma_{AB},$$

$$\Sigma_{AB} = A_E + A_W + A_N + A_S + b\frac{1}{2}(B_E + B_W + B_N + B_S),$$

$$A_i = a\cdot\frac{1}{8}(E_i + |E_i|), \quad (i = E, W, N, S)$$

$$B_E = b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Y_N - Y_S}{X_P - X_P}, \quad B_W = b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{Y_N - Y_S}{X_P - X_W},$$

$$B_N = b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{X_E - X_W}{Y_N - Y_P}, \quad B_S = b\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{X_E - X_W}{Y_P - Y_S},$$

$$E_E = \Psi_{SE} + \Psi_S - \Psi_{NE} - \Psi_N,$$

$$E_W = \Psi_{NW} + \Psi_N - \Psi_{SW} - \Psi_S,$$

$$E_N = \Psi_{NE} + \Psi_E - \Psi_{NW} - \Psi_W,$$

$$E_S = \Psi_{SW} + \Psi_W - \Psi_{SE} - \Psi_E$$

であり，a, b, dは付表1の値をとる。

参　考　文　献

(1) Bergelin, O.P., et al., Trans. ASME, 74, 1952, 953−960.

(2) Žukauskas, A.A., et al., Heat Transfer-Soviet Research, Vol. 10, No.6, 1978, 90−101.

(3) Žukauskas, A. & Ulinskas, R., 6th Int. Heat Transf. conference, Vol.4, 1978, 243−248.

(4) Thom, A. & Apelt, C.J., "Field computation in Engineering and Physics", Van Nonstrand company Ltd. 1961.

(5) Le Feuvre, R.F., Imeperial college London, Mech. Engr. Dept., HTS/74/5, 1973.

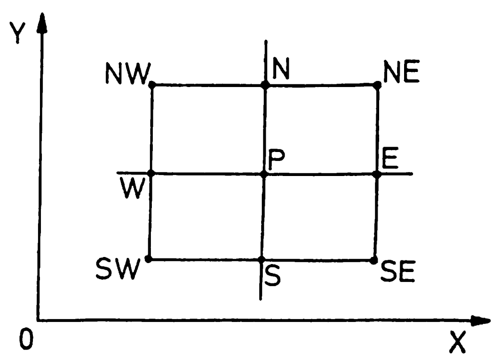
(6) Taylor, C. ら編, "Numerical Method in Laminar and Turbulent Flow", Pentch Press, 1978.

(7) Launder, B.E. & Massey, T.H., Trans. ASME, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, 1978, 565−571.

(8) Massey, T.H., et al., 6th Int. Heat Transf. conference, Vol.4, 1978, 261−266.

(9) Gosman, A.D., et al., Heat and Mass Transfer in Recirculating Flow, Academic Press, London, 1969.

(10) 阿部, 石黒, 機論, 41−352, (昭50−12), 3577−3587.



付図1

Φ	a	b	d
Ψ	0	1	Ω_P
Ω	1	$1/Re^*$	0
Θ	1	$1/Re^*Pr$	0

付表1