曲げを受ける薄肉部材のせん断変形解析

堀　　江　　保

Shear-Deformation Analysis of Thin-Walled Members under Bending

Yasushi HoRIE

(昭和53年10月31日受理)

1　は　じ　め　に

はり理論は, Bernoulli-Eulerの曲げ理論に端を発し，著名な研究者らの業績によって今日の構造工学発展の基礎となっている。

しかしながら，最近の橋梁構造物等の大型化，軽量化に伴ない構造材料の高度利用が叫ばれ，従来のはり理論を改良したより精密なはり理論の必要が生じてきた。その精密化はり理論を展開する上で欠くことのできないものの一つにせん断変形に関する矛盾の解消があげられる。すなわち古典曲げ理論ではせん断ひずみ零の仮定より出発するが，実際にはせん断応力が生じているのでその分布を応力のつり合いより求めている。従って変位場を求める段階ではつり合いを満たしてないという矛盾が生じている。

本法の理論体系は，ある仮定されたひずみ場より変位に関する基礎式を求め，さらに，つり合いを満たすべくひずみ場を修正する，いわゆる遂次近似法であるが，著者らは，すでに収束を確認した上，第二近似のひずみ場を明示した[1)]。本報告では，そのひずみ場を基に，特に一方向曲げを受ける部材に注目し，微分方程式を求め数値計算を行なったものである。

2　微分方程式と境界条件式の誘導

はり部材内部の変形を支配する微分方程式と境界条件式は，内部ひずみエネルギーΠ_iと外部ひずみエネルギーΠ_eを求め，変分原理に基づいた次式の仮想仕事の原理を適用して誘導できる。

$$\delta\Pi_i - \delta\Pi_e = 0 \tag{1}$$

本法の基本的仮定である断面形不変と，薄肉部材を対象としている点を考慮すると，ひずみ成分はε_z, γ_{sz}のみが残り，従って内部ひずみエネルギーは次式となる。

$$\Pi_i = \int_{z_1}^{z_2}\int_F (\sigma_z\cdot\varepsilon_z + \tau_{sz}\cdot\gamma_{sz})\,d\mathrm{F}\cdot dZ \tag{2}$$

ここで用いた座標は，Z軸がはり部材軸方向，S軸が薄肉断面中心線に沿ってとったものである。一方外部ひずみエネルギーは

$$\Pi_e = \int_{z_1}^{z_2}\int_F (p_{xd}\cdot\overline{u} + p_{yd}\cdot\overline{v} + p_{zd}\cdot\overline{w})\,dF\cdot dZ + \left[\int_F (\overline{\sigma}_z\overline{w} + \overline{\tau}_{sz}\xi)\,dF\right]_{z_1}^{z_2} \tag{3}$$

で与えられる。上式中，p_{xd}, p_{yd}, p_{zd}は分布外力p_dのx, y, z軸方向成分であり，$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, ξは各々薄肉断面上任意点のx, y, z軸方向およびS方向変位成分である。すなわち第一項の体積積分は，はり内部の外力によるひずみエネルギー，第二項の面積積分は，はり端部でのひずみエネルギーを表わしている。

ここで，本報告で対象とした曲げ部材について，一方向曲げのみに注目すると，ひずみ成分は次式で与えられる[1)]。

$$\varepsilon_z = -x\cdot u'' + \frac{E}{G}\cdot B_y\cdot U'$$

$$\gamma_{sz} = \frac{E}{G}\cdot\frac{S_y}{t}\cdot U \qquad \text{(4) a , b}$$

また，外力としてもx方向のみを考え，断面形状をねじりと連成しない二軸対称に選ぶと，変位成分は

$$u = \overline{u} \qquad \overline{w} = -x\cdot u' + \frac{E}{G}\cdot B_y\cdot U \qquad \xi = \ell\cdot u \qquad \text{(5) a — c}$$

となる。ここで，ℓは$cos\,(s,x)$で与えられる方向余弦である。(4)式，(5)式を(2)式，(3)式に代入し変分を求めて(1)式を適用すると，部分積分を実行した後，次式となる。

$$\int_{z_1}^{z_2}\left\{(M_y'' + p_x)\delta u + (H_y' - T_u)\delta U\right\} dZ$$

$$+\Big[(\bar{Q}_x-M_y')\delta u+(M_y-\bar{M}_y)\delta u'$$

$$+(\bar{H}_y-H_y)\delta U\Big]_{z_1}^{z_2}=0 \qquad (6)$$

ここで，断面力および外力は次式らで定義した。

$$M_y=\int_F\sigma_z x dF \qquad H_y=\int_F\sigma_z\frac{E}{G}\cdot B_y dF$$

$$T_u=\int_F\tau_{sz}\cdot\frac{E}{G}\cdot\frac{S_y}{t}dF \qquad (7)\ \text{a—c}$$

$$p_x=\int_F p_{xd}dF \qquad \bar{Q}_x=\int_F\bar{\tau}_{sz}\cdot\ell dF$$

$$\bar{M}_y=\int_F\bar{\sigma}_z\cdot x dF \qquad \bar{H}_y=\int_F\bar{\sigma}_z\cdot\frac{E}{G}\cdot B_y dF$$

(8) a—d

(6)式より微分方程式，境界条件式は次式のように求められる。

δu，δU の任意性より

$$M_y''+p_x=0$$
$$H_y''-T_u=0 \qquad (9)\ \text{a , b}$$

$Z=Z_1$ および $Z=Z_2$ において

$\delta u=0$ または $\bar{Q}_x=M_y'$

$\delta u'=0$ または $\bar{M}_y=M_y$

$\delta U=0$ または $\bar{H}_y=H_y$ (10) a—f

(4)式にフックの法則を適用して応力を求め，(7)式に代入すると，断面力と変位の関係が次式のように得られる。

$$M_y=-EJ_yu''+E_gK_{yy}U'$$
$$H_y=-E_gK_{yy}u''+E_{gg}R_{yy}U'$$
$$T_u=E_gD_{yy}U \qquad (11)\ \text{a—c}$$

ここで，$E_g=E/G^2$，$E_{gg}=E^2/G^3$，また断面諸量は次式で定義した。

$$J_y=\int_F x^2dF \qquad K_{yy}=\int_F B_y\cdot xdF$$

$$D_{yy}=\int_F\frac{S_y^2}{t^2}dF \qquad R_{yy}=\int_F B_y^2dF$$

(12) a—d

(11)式を(9)式，(10)式に代入すると変位に関する式が得られ，さらに，U を消去すると，u に関して次式の微分方程式，境界条件式が導かれる。

$$u^{\mathrm{VI}}-k^2u^{\mathrm{IV}}=-k^2\frac{p_x}{EJ_y} \qquad (13)$$

$Z=Z_1$ 　$Z=Z_2$ において

$\delta u=0$ または

$$k^2u'''-u^{\mathrm{V}}=-n\frac{p_x'}{EJ_y}-k^2\frac{\bar{Q}_x}{EJ_y}$$

$\sigma u'=0$ または

$$k^2u''-u^{\mathrm{IV}}=-n\frac{p_x}{EJ_y}-k^2\frac{\bar{M}_y}{EJ_y}$$

$$k^2(n-1)u'''-nu^{\mathrm{V}}=-n^2\frac{p_x}{EJ_y} \quad \text{または}$$

$$k^2(n-1)u''-nu^{\mathrm{IV}}=-n^2\frac{p_x}{EJ_y}-k^2(n-1)\frac{\bar{H}_y}{E_gK_{yy}}$$

(14) a—f

ここで

$$n=\frac{1}{1-\dfrac{K_y{}^2{}_y}{J_y\cdot R_{yy}}} \qquad k^2=\frac{G}{E}n\frac{D_{yy}}{R_{yy}}$$

(15) a , b

3 数値計算例

(13)式の微分方程式より一般解は次式となる。

$$u=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3$$
$$+\frac{p_x}{24EJ_y}z^4+c_4\cosh kz+c_5\sinh kz \qquad (16)$$

ここでは(14)式の境界条件式を用いて，つぎの四種類のはり形式について解いた。

CASE—[A]……片持ばり先端に集中荷重 P が作用した場合

$$u=\frac{P\ell^3}{6EJ_y}\Big[3\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^2-\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^3+\frac{6(n-1)}{(k\ell)^3}\Big\{kZ+\frac{\sinh k(\ell-Z)}{\cosh k\ell}-\tanh k\ell\Big\}\Big] \qquad (17)\text{a}$$

CASE—〔B〕…片持ばりに等分布荷重 p が作用した場合

$$u=\frac{p\ell^4}{24\ EJ_y}\Big[6\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^2-4\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^3+\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^4+\frac{12(n-1)}{(k\ell)^2}\Big\{2\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)-\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^2\Big\}+\frac{24(n-1)}{(k\ell)^4}\Big\{\frac{1+k\ell\cdot\sinh k\ell}{\cosh k\ell}\cdot(\cosh kz-1)-k\ell\cdot\sinh kz\Big\}\Big] \qquad (17)\text{b}$$

CASE—〔C〕…単純ばり中央に集中荷重 P が作用した場合

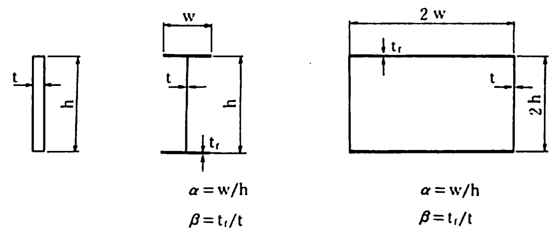
$$u=\frac{P\ell^3}{48EJ_y}\Big[3\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)-4\Big(\frac{Z}{\ell}\Big)^3+\frac{24(n-1)}{(k\ell)^3}\Big\{kZ-\frac{\sinh kZ}{\cosh(k\ell/2)}\Big\}\Big] \quad 0\leqq Z\leqq\frac{\ell}{2} \qquad (17)\text{C}$$

CASE—〔D〕…単純ばりに等分布荷重 p が

作用した場合

$$u=\frac{p\ell^4}{24EJ_y}\left[\left(\frac{Z}{\ell}\right)-2\left(\frac{Z}{\ell}\right)^3+\left(\frac{Z}{\ell}\right)^4+\frac{12(n-1)}{(k\ell)^2}\left\{\left(\frac{Z}{\ell}\right)-\left(\frac{Z}{\ell}\right)^2\right\}+\frac{24(n-1)}{(k\ell)^4}\left\{\frac{\sinh kZ+\sinh k(\ell-Z)}{\sinh k\ell}-1\right\}\right] \tag{17d}$$

ただし，z 軸は片持ばりでは固定端より，単純ばりで



図—1　断面形状

CASE	古典曲げ理論	TIMOSHENKO	COWPER	REISSNER	本　法
[A]	$4.000(\times\frac{P}{t\cdot E}10^3)$	4.0400 (1.00%)	4.0314 (0.78%)		4.0310 (0.78%)
[B]	$1.500(\times\frac{p\cdot l}{t\cdot E}10^3)$	1.5200 (1.33%)	1.5157 (1.05%)		1.5154 (1.03%)
[C]	$0.2500(\times\frac{P}{t\cdot E}10^3)$	0.2600 (4.00%)	0.2579 (3.14%)		0.2577 (3.08%)
[D]	$0.1563(\times\frac{p\cdot l}{t\cdot E}10^3)$	0.1613 (3.20%)	0.1602 (2.51%)		0.1602 (2.51%)

表—1　最大たわみに及ぼす影響（矩形断面）

CASE	古典曲げ理論	TIMOSHENKO	COWPER	REISSNER	本　法
[A]	$0.5714(\times\frac{P}{t\cdot E}10^3)$	0.5981 (4.67%)	0.5988 (4.79%)		0.5990 (4.82%)
[B]	$0.2143(\times\frac{p\cdot l}{t\cdot E}10^3)$	0.2276 (6.22%)	0.2280 (6.38%)		0.2280 (6.41%)
[C]	$0.3571(\times\frac{P}{t\cdot E}10^2)$	0.4238 (18.7%)	0.4255 (19.2%)		0.4258 (19.2%)
[D]	$0.2232(\times\frac{p\cdot l}{t\cdot E}10^2)$	0.2565 (14.9%)	0.2574 (15.3%)		0.2577 (15.5%)

表—2　最大たわみに及ぼす影響（Ｉ形断面）

CASE	古典曲げ理論	TIMOSHENKO	COWPER	REISSNER	本　法
[A]	$0.2500(\times\frac{P}{t\cdot E}10^3)$	0.2667 (6.67%)	0.2692 (7.69%)	0.2532 (1.30%)	0.2698 (7.91%)
[B]	$0.9375(\times\frac{p\cdot l}{t\cdot E}10)$	1.0208 (8.89%)	1.0336 (10.3%)	0.9531 (1.67%)	1.0348 (10.4%)
[C]	$1.5625(\times\frac{P}{t\cdot E})$	1.9792 (26.7%)	2.0428 (30.7%)	1.6403 (4.98%)	2.0489 (31.1%)
[D]	$0.9765(\times\frac{p\cdot l}{t\cdot E})$	1.1848 (21.3%)	1.2166 (24.6%)	1.0182 (4.27%)	1.2269 (25.7%)

表—3　最大たわみに及ぼす影響（箱形断面）

は支点よりとった。また，計算には，図—1に示す矩形，I形，箱形断面を用いた。

表1〜3は，[A]〜[D]の各々の場合の最大たわみを従来のはり理論と比較したものである。その際，$G/E=3/8$，$h/\ell=1/10$として計算し，I形断面，箱形断面の α,β は標準的断面形状と考えられるつぎの値を用いた。

I形断面………$\alpha=1/2$　　$\beta=2$

箱形断面………$\alpha=3/2$　　$\beta=2$

図2〜5は，箱形断面の形状変化に対するせん断変形の影響を表わしたもので，u_Bは従来のはり理論によるたわみ，u_Sはせん断変形によるたわみである。また，$\beta=2$として計算した。これらの表および図において，Timoshenko, Cowper, Reissnerの理論による最大たわみは，各々つぎのようにして求めた。

（Timoshenkoの理論）

Timoshenkoは，たわみに及ぼすせん断変形の影響として，たわみ曲線の傾斜が近似的に中立軸におけるせん断ひずみに等しいと考えた[2]。すなわち，中立軸のせん断ひずみを γ_c，せん断によるたわみを u_s とすれば

$$\gamma_c=\frac{du_s}{dz} \tag{18}$$

と表わされる。さらに，せん断ひずみを断面内で一定分布するものと仮定し，次式とおいた。

$$\gamma_c=\frac{\alpha_s Q}{GA} \tag{19}$$

ここで，Q/A は平均せん断応力，α_sはせん断係数（shear—coefficient）と呼ばれる乗数である。(18)式，(19)式より $dQ/dz=-p$ を考慮すると，全たわみに対する微分方程式は次式となる。

$$\frac{d^2u}{dz^2}=-\frac{M}{EI}-\frac{\alpha_s p}{GA}$$

Timoshenkoの理論によるたわみは，上式を解いて各々次式のようになる。

$$[A]\quad u=\frac{P\ell^3}{3\ EJ_y}\left(1+\frac{3\ \alpha_s EJ_y}{GA\ell^2}\right) \tag{20a}$$

$$[B]\quad u=\frac{p\ell^4}{8\ EJ_y}\left(1+\frac{4\ \alpha_s EJ_y}{GA\ell^2}\right) \tag{20b}$$

$$[C]\quad u=\frac{p\ell^3}{48EJ_y}\left(1+\frac{12\alpha_s EJ_y}{GA\ell^2}\right) \tag{20c}$$

$$[D]\quad u=\frac{5\ p\ell^4}{384EJ_y}\left(1+\frac{48\alpha_s EJ_y}{5\ GA\ell^2}\right) \tag{20d}$$

上式中，かっこ内の第二項がせん断変形の影響を表わしている。せん断係数 α_sは，各々の断面に対しつぎの値となる。

矩形断面　　$\alpha_s=\dfrac{3}{2}$

I形断面　　$\alpha_s=1+2\ \alpha\beta$

箱形断面　　$\alpha_s=1+\alpha\beta$

（Cowperの理論）

Cowperは，せん断応力が断面上で一定分布しない点を考慮し，3次元弾性論を用いてTimoshenkoのせん断係数を厳密に求め，次式の微分方程式を誘導した[3]。

$$\frac{d^2u}{dz^2}=-\frac{M}{EI}+\frac{1}{KAG}\ \frac{dQ}{dZ}$$

上式の解は，(18)式において $\alpha_s=1/K$ とおいて求められ，K は各々の断面に対し文献3）で与えられている。その際，ポアソン比 $\nu=0.3$として計算し，$m=\alpha\beta$，$n=\alpha$ の関係を用いた。

（Reissnerの理論）

Reissnerは，箱形断面のフランジを横切って軸応力が放物線分布するものと仮定し，それをフランジとウェブの結合部での応力の適合条件，応力およびモーメントのつり合い，最小仕事の原理を用いて求めた。[4)5)]その結果次式の微分方程式と境界条件が導かれる。

$$u''-\frac{1}{k^2}u^{\mathrm{IV}}=-\frac{M}{EI}+\frac{n}{k^2}\ \frac{M''}{EI}$$

端部において

$$u'''=-n\frac{M'}{EI}\quad \text{または}\quad u''=-n\frac{M}{EI}$$

これを解いて次式が得られる。

$$[A]\quad u=\frac{P\ell^3}{3\,EJ_y}\left[1+\frac{3(n-1)}{(k\ell)^3}\left\{k\ell-\tanh k\ell\right\}\right] \tag{21a}$$

$$[B]\quad u=\frac{p\ell^4}{8\,EJ_y}\left[1+\frac{8(n-1)}{(k\ell)^4}\left\{1+\frac{1}{2}(k\ell)^2-k\ell\cdot\tanh k\ell-\frac{1}{\cosh k\ell}\right\}\right] \tag{21b}$$

$$[C]\quad u=\frac{P\ell^3}{48\,EJ_y}\left[1+\frac{24(n-1)}{(k\ell)^3}\left\{\frac{k\ell}{2}-\tanh\frac{k\ell}{2}\right\}\right] \tag{21C}$$

$$[D]\quad u=\frac{5\,p\ell^4}{384\,EJ_y}\left[1+\frac{384(n-1)}{5(k\ell)^4}\left\{\frac{(k\ell)^2}{8}-\frac{1}{\cosh(k\ell/2)}-1\right\}\right] \tag{21d}$$

Reissnerの理論による微分方程式と境界条件は，本

法において外荷重としてモーメントをとった場合と全く同形である。従って(21)式は本法による最大たわみ式でもあるが，k と n の定義式が異なり次式となる。

$$n=\frac{1}{1-5\ I_s/(6\ I)}\qquad k=\frac{1}{w}\sqrt{\frac{5\ n}{2}\ \frac{G}{E}}$$

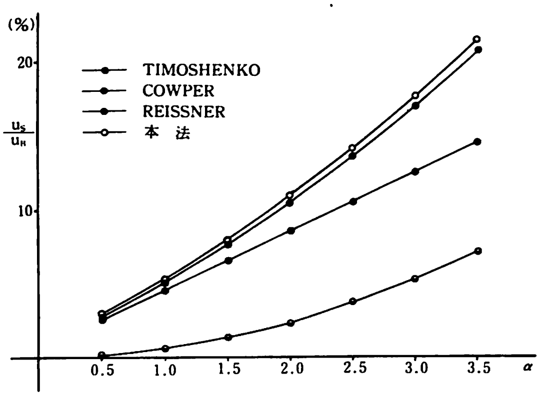
ここで，

$$\frac{I_s}{I}=\frac{1}{1+1/(3\ \alpha\beta)}$$

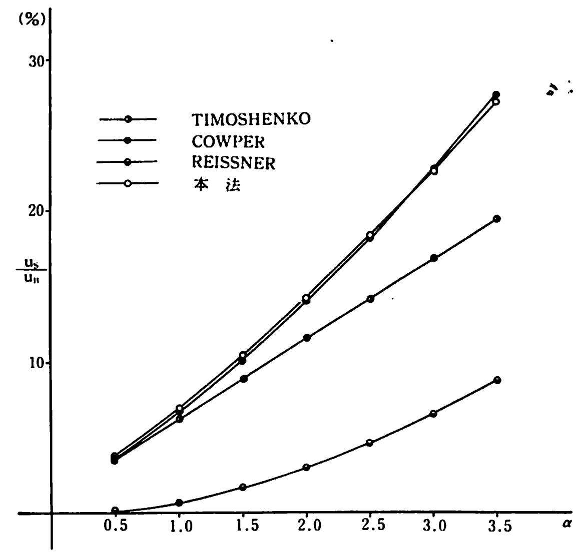
である。

また，軸応力は(17)式により(11)式を用いて断面力 M_y，H_yを求め次式より計算した。

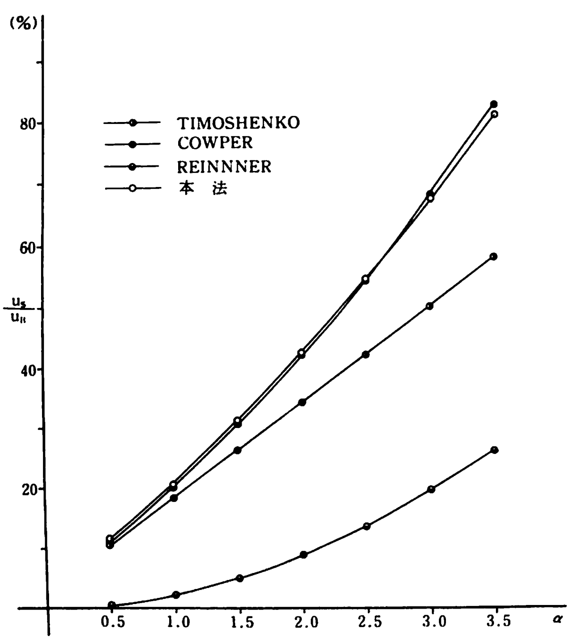
$$\sigma_z=n\ \left(x-\frac{K_{yy}}{R_{yy}}B_y\right)\ \frac{M_y}{J_y}-n\ \left(\frac{K_{yy}}{J_y}x-B_y\right)\ \frac{G}{E}\ \frac{H_y}{R_{yy}} \tag{22}$$



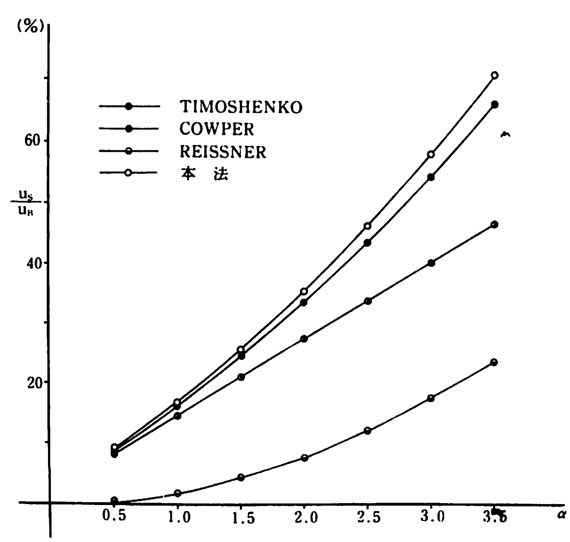
図—2　箱形断面の形状変化に対する影響 (CASE-[A])



図—3　箱形断面の形状変化に対する影響 (CASE-[B])



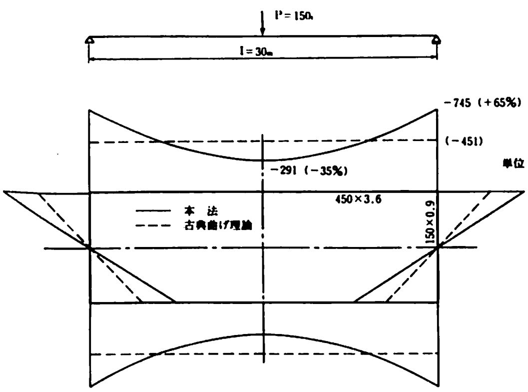
図—4　箱形断面の形状変化に対する影響 (CASE-[C])



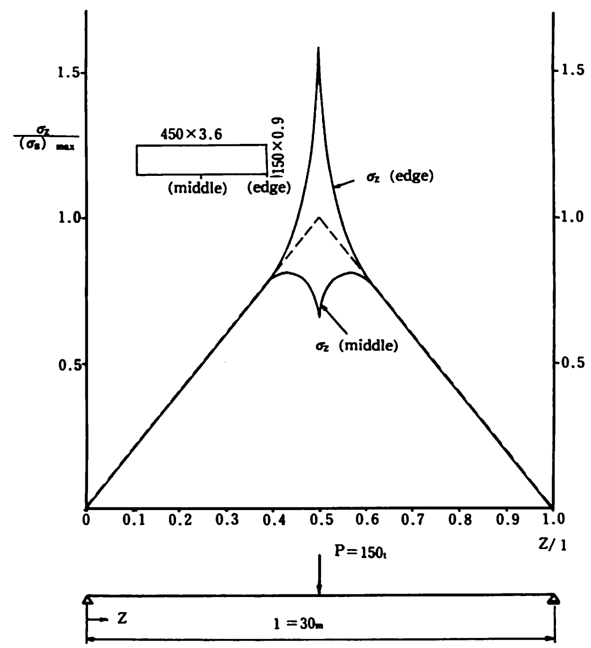
図—5　箱形断面の形状変化に対する影響 (CASE-[D])

図—6は，CASE—[C] の荷重作用点での軸応力分布を示したもので，計算には図中の断面寸法，スパン長，荷重強度を用いた。破線の従来のはり理論に対し，本法では断面内の応力分布，いわゆるshear lagを評価できる点が特長である。図—7はCASE—[C] の場合の軸方向変化を示したもので，縦軸に従来のはり理論の最大応力（荷重作用位置の応力）に対する比をとってある。図中には，箱形断面の中央部および縁端部の値をプロットした。

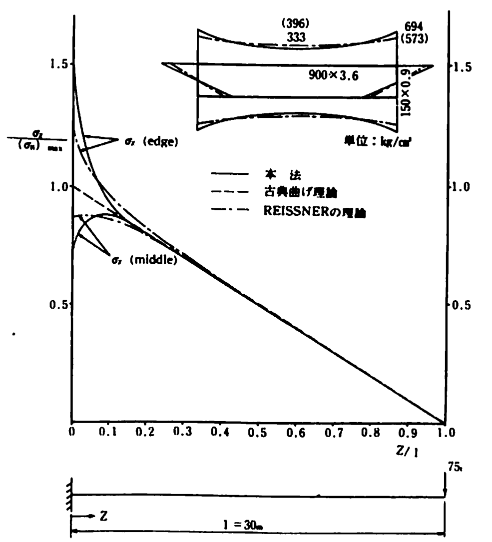
図—8は，CASE—[A]について Reissner の理論



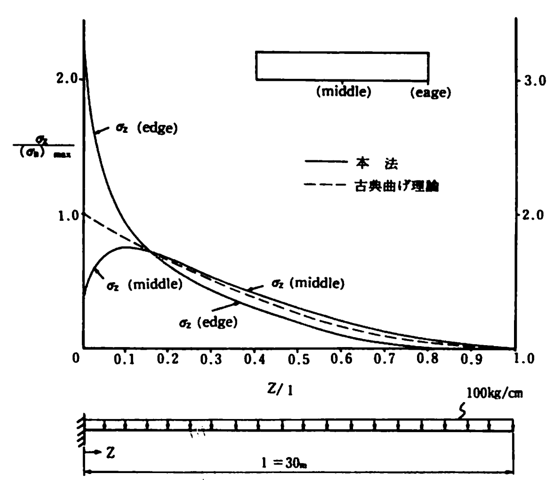
図—6 軸応力分布（CASE-[C]）



図—7 軸応力の軸方向変化（CASE-[C]）



図—8 REISSNERの理論との比較



図—9 NEGATIVE SHEAR LAG

と本法を比較したものである。図より固定端での影響は，断面の中央部，縁部とも本法の方が大きいが，その及ぼす範囲は逆に小さく，せいぜい $z/\ell=0.15$ 程度までであることが認められる。図—9は，CASE—[B]の場合について，最大曲げ応力に対する比の軸方向変化を示したものである。図において $z=\ell$ が0.2付近を境に中央部と縁端部の値が逆転している。これは，Negative Shear Lag と呼ばれている現象[6]であり，はり端部の大きな拘束による影響であろうと思われる。

以上の結果を総括すればつぎのいくつかの点が指摘できる。

(1) 矩形断面，I形断面，箱形断面を問わず，またいずれの理論によっても CASE—[C]の場合の最大たわみに及ぼす影響が最も大きい。

(2) 断面形状，はり形式によっては，せん断によるたわみが曲げによるたわみと同程度にまで達する場合もある。

(3) 本法のたわみに及ぼすせん断変形の影響は，全体を通じてほぼ Cowper の理論による値と一致している。

(4) Timoshenko の理論は，矩形断面，I形断面に対しては十分適用できるが，幅の広い箱形断面に対しては不十分である。

(5) 本法により，断面内の軸応力分布が求められ，さらに，Negative Shear Lag 効果も評価できる。

(6) 本法により Reissner の誘導した微分方程式と同形のものが得られ，また軸応力分布の比較によって本法は Reissner の理論を改良したものであると思われる。

4　ま　と　め

本報告は，古典曲げ理論のせん断応力に関する矛盾を解消したひずみ成分より微分方程式を誘導し，曲げを受ける部材を対象に数値計算を行なったものである。微分方程式は，新パラメーター $U\,(=u''')$ を用いることにより階数が引き下げられ，またその形が Reissner のものと一致する点が特長である。

本法と種々の理論との比較は，本法の妥当性を確かめる意味で行なったが，Cowper の値との一致は，それが3次元弾性論を基にしていることより本法のはり理論としての有意性を示すものと思われる。

さらに，本法の最大の特長は，はり理論を保持したうえで断面内の応力分布を評価できる点で，有効幅との関わり合いが今後の課題であろうと思われる。

最後に，本研究を行なうにあたり，終始御指導頂いた秋田大学鉱山学部土木工学科稼農知徳教授に心から感謝の意を表する次第です。

文　　献

1）堀江：薄肉断面部材の精密化梁理論に関する研究，秋田高専研究紀要第13号，pp.87～96，1978年

2）Timoshenko, Goodier：Mechanics of Materials, pp.201～208, 1972年

3）Cowper：The Shear Coefficient in Timoshenkó's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, pp.335～340, 1966年

4）Reissner：Least Work Solutions of Shear Lag Problems, Journal of Aeronautical Sciences, pp.284～291, 1941年

5）Reissner：Analysis of Shear Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy, Journal of the Aeronautical Sciences, pp.268～278, 1946年

6）中井，村山：片持ばりの Negative Shear Lag の解析とその応用，土木学会論文報告集第256号，pp.21～33，1976年