

薄肉断面部材の精密化梁理論に関する研究

堀 江 保

Some Studies on the Refinement of Thin-Walled Beam Theory

Yasushi HORIE

(昭和52年10月31日受理)

1 はじめに

従来の梁の曲げ理論においては、せん断ひずみ零の仮定より出発して軸応力を求め、せん断応力は、せん断ひずみ零に対応するせん断応力 ($\tau = 0$) を軸応力とのつり合いより修正して求めている。従って、変位場を求める段階では応力のつり合いを満たしていない、という矛盾した結果を生み出す。この仮定は、同様に、薄肉部材に対するそり拘束ねじり理論にも応用されている¹⁾。

これらの理論では、すなわち、せん断応力により生じるせん断ひずみを無視しており、応力のつり合い式より見れば、せん断応力とつり合う軸応力の影響を無視していることになる。この影響は、断面形状あるいは構造部分によっては無視できない程大きな量に達することもある。長さに対する高さの比が大きい断面を持つ梁部材、横荷重載荷点近傍および固定端付近等せん断応力の影響の大きい部分、また、ねじりに対するそり拘束の大きい部分、などがその例である。これらせん断応力およびそりによる軸応力とつり合うせん断変形の影響は、より精密な梁理論を展開する上で無視できないものと思われる。

今日まで、実用上適用可能な簡易さをもつ精密化梁の曲げ理論の研究として、Timoshenko²⁾、Reissner³⁾等の理論がある。Timoshenkoは、たわみに及ぼすせん断変形の影響として、たわみ曲線の傾斜が近似的に中立軸におけるせん断ひずみに等しいとし、そのせん断ひずみを平均せん断応力にせん断係数を乗じた形で表わした。また、Reissnerは、箱形断面部材が曲げを受ける時の上、下版の軸応力分布に着目し、版を横切って、パラボラ分布する関数を仮定し、せん断遅れ (shear-lag) 理論を確立した。

本論文は、あくまでも梁理論の立場より、曲げおよび

ねじりに伴うせん断変形を一括して考慮し、それをひずみ成分表示に取り入れたものである。その際、断面不変の仮定は保持し、また薄肉断面材による有利性を活用した。ここでは、初等梁理論と同様の仮定より出発し、繰り返し修正する方法を用いたが、この方法を用いる場合解の収束が問題となる。本文では、数値例によりそれを確認したうえ実際には1回の修正で終わっている。

2 座標系および記号

解析には、つぎの2種類の座標系を用いた。ひとつは横断面上の任意原点Dに関する (x, y, z) 座標系、そしていまひとつは薄肉断面上の任意原点Cに関する (s, n, z) 座標系である。両座標系において共通な座標軸 Z は部材軸方向とし、 (x, y) と (s, n) は

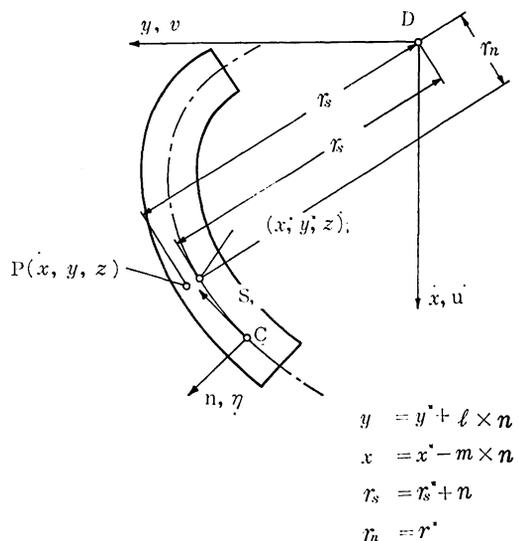


図-1

図一に示す関係にあるものとする。

前図において、Pは薄肉断面上の任意点、Sは薄肉中心線に沿っての座標、nはSに直角な肉厚方向座標である。また、右肩に*を付したものは薄肉中心線上(n=0)での諸量を表わす。さらに、r_sおよびr_nは各々、横断面の原点Dより薄肉断面上の点PのS方向、n方向までの距離で、方向余弦l、mを

$$l = -\cos(n, y) = -\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$m = \cos(n, x) = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} \quad (1) a, b$$

と定義すると次式で表わされる。

$$r_s = mx - ly$$

$$r_n = -lx - my \quad (2) a, b$$

変位成分記号として(x, y, z)方向、および(s, n)方向に対し各々つぎのものを用いた。

(x, y, z)方向……横断面原点Dで(u, v, w)
薄肉断面任意点Pで(u, v, w)

(s, n)方向……(ξ, η)

また、ひずみ成分記号として

x, y, z軸方向ひずみ……ε_x, ε_y, ε_z
(x, y, z)座標系のせん断ひずみ……γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}
(s, n, z)座標系のせん断ひずみ……γ_{sz}, γ_{nz}, γ_{sn}

を用いた。

3 解析上の仮定

本解析では、基本的仮定としてつぎの2つのものを用いた。

[I]……断面形不変

[II]……肉厚中心面に垂直でかつ部材軸に平行な面のせん断ひずみは無視する。

仮定[I]は、載荷により変形した後も断面形状は変形前と同じである、とするもので、ここで扱う梁部材のように長さに比べて断面寸法の小さい場合には有効である。また、仮定[II]は薄肉部材を扱う際に一般に用いられる仮定である。[I]および[II]は、各々次式で表わされる。

$$\text{仮定[I]} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{sn} = 0 \quad (3)$$

$$\text{仮定[II]} \quad \gamma_{nz} = 0 \quad (4)$$

その他本文中で用いた仮定を列挙するとつぎのとおりである。

(i) 応力のつり合い式において、応力は平均値として薄肉中心線に関するものを代表させる。

(ii) 微小要素の応力のつり合い式で外力は無視す

る。

(iii) 肉厚の部材軸方向(z方向)の変化はないものとする。

(iv) 部材軸方向応力をつり合い式に代入する際、軸変位wの軸方向(z方向)変化は、他に比べて小さいものとして無視する。

これらはすべて応力のつり合い式に関する仮定で、(i)は薄肉部材では応力が肉厚方向に直線分布することより妥当であり、(ii)および(iii)は簡易化のために想定したものであるが実際問題に十分適用できる。また、(iv)は軸応力とつり合うせん断変形が部材軸に垂直な変位に支配されると考えられるからである。

4 ひずみ成分表示

(x, y, z)座標系に関する薄肉断面上の任意点Pでの変位—ひずみ関係として次式を用いる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (5) a - c$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (6) a - c$$

上式に(3)式で示される仮定[1]を適用すると、P上の変位 \bar{u} , \bar{v} は原点Dの変位u, vおよびzの関数φによって次式で示される⁴⁾。

$$\bar{u} = u - y\varphi \quad \bar{v} = v + x\varphi \quad (7) a, b$$

(7)式は、また幾何学的にも得られ、そこにおいてφは断面の任意原点に関する回転角を表わしている。

(x, y, z)座標のせん断ひずみと(s, n, z)座標のせん断ひずみは、方向余弦l, mを用いて

$$\gamma_{sz} = m\gamma_{yz} + l\gamma_{zx}$$

$$\gamma_{nz} = -l\gamma_{yz} + m\gamma_{zx} \quad (8) a, b$$

という関係にあるから、これに(6)式を代入し、(1)(2)(7)式の関係を用いてつぎの式が得られる。

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} + u' \frac{\partial x}{\partial s} + v' \frac{\partial y}{\partial s} + r_s \varphi' \quad (9)$$

$$\gamma_{nz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + u' \frac{\partial x}{\partial n} + v' \frac{\partial y}{\partial n} + r_n \varphi' \quad (10)$$

上式中、()'はzに関する1回微分を示している。

ここで図一2のような微小要素t ds dzを取り出しz軸方向の応力のつり合いを考えたと外力を無視してつぎのようになる。

$$\frac{\partial(r_{sz}^* t)}{\partial s} ds dz + \frac{\partial(\sigma_z^* t)}{\partial z} dz ds = 0$$

上式において厚さtの部材軸方向の変化を無視してsで

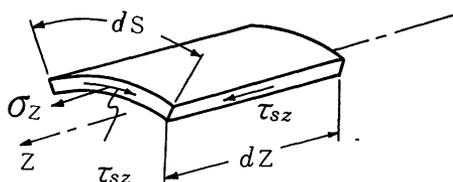


図-2

積分すると、積分定数をqとして

$$\tau_{sz}^* t = q - \int_{s_1}^s \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} t ds$$

となる。ここで τ_{sz}^* , σ_z^* は前述のように薄肉中心線に関する応力であり、上式を導く際仮定 (i) ~ (iii) を適用した。応力とひずみの関係より、せん断弾性係数を G とするとつり合い式は次式で表わされる。

$$\tau_{sz}^* = \frac{q}{Gt} - \int_{s_1}^s \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} t ds \quad (1)$$

本解析では、(1)式を応力のつり合いの基本式とし、初め、直応力 σ_z^* とつり合うせん断変形を無視したものより部材軸方向変位を求め、その結果得られる直応力 σ_z^* を再び(1)式に代入しひずみ成分を修正した。その際、修正前の変位には添字 1 を修正後の変位には添字を 2 付して明確に区別した。(1)式において第 2 項を無視すると

$$\tau_{sz}^* = \frac{q_1}{Gt} \quad (2)$$

となる。なお、開断面部材に対しては(2)式に相当するものとして $\tau_{sz}^* = 0$ が得られるが、ここでは閉断面部材を対象とし、その特別な場合として開断面部材について論じることとする。

(10)式に(4)式で示される仮定 [II] を適用すると、

$$\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} + u'_1 \frac{\partial x}{\partial n} + v'_1 \frac{\partial y}{\partial n} + r_n \phi'_1 = 0$$

となり、これを n で積分すると

$$\bar{w}_1 = C_1 - u'_1 x - v'_1 y - r_n \phi'_1 n \quad (3)$$

となる。ここで、 C_1 は積分定数であり、薄肉中心線上の座標および変位で表示でき、次式が得られる。

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_1^* - (x - x_0^*) u'_1 - (y - y_0^*) v'_1 - r_n \phi'_1 n \quad (4)$$

また、(9)式を(2)式に代入すると次式になる。

$$\frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} = \frac{q_1}{Gt} - u'_1 \frac{\partial x^*}{\partial s} - v'_1 \frac{\partial y^*}{\partial s} - r_s^* \phi'_1 \quad (5)$$

上式を S で積分すると

$$\bar{w}_1^* = \int_0^s \frac{q_1}{Gt} ds - u'_1 (x^* - x_0^*) - v'_1 (y^* - y_0^*) - \phi'_1 \int_0^s r_s^* ds + \bar{C}_1 \quad (6)$$

昭和53年2月

となる。変位の連続条件

$$\oint \frac{\partial \bar{w}_1^*}{\partial s} ds = 0$$

を(5)式に適用すると、 q_1 は

$$q_1 = \frac{\oint r_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \phi'_1 \quad (7)$$

として与えられるので、(6)式を(4)式に代入して

$$\bar{w}_1 = \bar{C}_1 - u'_1 (x - x_0^*) - v'_1 (y - y_0^*) - (\bar{\omega} + n r_n) \phi'_1 \quad (8)$$

となる。ここで、 x_0 , y_0 は C 点 ($s = 0$) の座標、また $\bar{\omega}$ は次式で定義した。

$$\bar{\omega} = \int_0^s \left\{ r_s^* - \frac{1}{t} \frac{\oint r_s^* ds}{\oint \frac{1}{t} ds} \right\} ds \quad (9)$$

(8)式の積分定数 \bar{C}_1 は、仮想薄板の方法⁵⁾を用いて求められる。この方法は、横断面原点 D と薄肉断面原点 C を厚さ $t = 0$ の仮想薄板で結ぶことにより薄肉断面上の任意点として定義した P 点が原点 D についても成り立つようにしたものである。原点 D の軸変位は w_1 であるから(8)式で $x = y = 0$, $n = 0$ とし、さらに C-D が開区間であることを考慮すると次式が得られる。

$$w_1 = \bar{C}_1 + u'_1 x_0^* + v'_1 y_0^* - \left(\int_0^{S_D} r_s^* ds \right) \phi'_1 \quad (10)$$

上式中、右辺第 4 項の S_D は、C-D に沿っての積分路でここでは一般的に曲線積分路とした。(10)式の \bar{C}_1 を(8)式に代入すると、修正前の軸変位が次式のように求まる。

$$\bar{w}_1 = w_1 - u'_1 x - v'_1 y - \omega \phi'_1 \quad (11)$$

ここで、 ω は

$$\omega = \bar{\omega} + r_n n - \int_0^{S_D} r_s^* ds$$

と定義したが、そり体積零、すなわち $\int_F \omega dF = 0$ を満たすよう ω を選ぶと

$$\int_0^{S_D} r_s^* ds = \frac{1}{F} \int_F (\bar{\omega} + r_n n) dF$$

となるので、 ω は次式になる。

$$\omega = \bar{\omega} + r_n n - \frac{1}{F} \int_F (\bar{\omega} + r_n n) dF \quad (12)$$

(12)式より仮定 (iv) を適用して軸応力は次式で与えられる。

$$\sigma_z^* = E (-u''_{1x} - v''_{1y} - \omega^* \phi''_1) \quad (13)$$

上式を(1)式に代入すると

$$\tau_{sz}^* = \frac{q_2}{Gt} - \frac{E}{Gt} \int_{s_1}^s (u'''_{1x} + v'''_{1y} + \omega^* \phi'''_1) t ds \quad (14)$$

(9)式を修正後の変位で表示したものと上式より

$$\frac{\partial \bar{w}_2^*}{\partial s} = \frac{q_2}{Gt} - u'_2 \frac{\partial x^*}{\partial s} - v'_2 \frac{\partial y^*}{\partial s} - r_s^* \varphi'_2 + \frac{E}{Gt} (S_{y0} u''''_1 + S_{x0} v''''_1 + S_{w0} \varphi''''_1) \quad (25)$$

ここで S_{y0} , S_{x0} , S_{w0} は次式のように定義した。

$$S_{y0} = \int_{S_1} x^* t ds \quad S_{x0} = \int_{S_1} y^* t ds$$

$$S_{w0} = \int_{S_1} \omega^* t ds \quad (26) a - c$$

また, q_2 は変位の連続条件より

$$q_2 = G \frac{\int_{S_1} r_s^* ds}{\int_{S_1} \frac{1}{t} ds} \varphi'_2 - E (S_{y1} u''''_1 + S_{x1} v''''_1 + S_{w1} \varphi''''_1) \quad (27)$$

となる。ここで S_{y1} , S_{x1} , S_{w1} は次式のように置いた。

$$S_{y1} = \frac{\int_{S_1} \frac{1}{t} S_{y0} ds}{\int_{S_1} \frac{1}{t} ds} \quad S_{x1} = \frac{\int_{S_1} \frac{1}{t} S_{x0} ds}{\int_{S_1} \frac{1}{t} ds}$$

$$S_{w1} = \frac{\int_{S_1} \frac{1}{t} S_{w0} ds}{\int_{S_1} \frac{1}{t} ds} \quad (28) a - c$$

(24) 式を同様に修正後の変位で表わすと

$$\bar{w}_2 = \bar{w}_2^* - (x - x^*) u'_2 - (y - y^*) v'_2 - r_n \varphi'_2 n \quad (29)$$

となる。(25) 式を S で積分し, 上式に代入すると

$$\bar{w}_2 = C_2 + \int_0^s \frac{q_2}{Gt} ds - u'_2 (x^* - x_0^*) - v'_2 (y^* - y_0^*) - \left(\int_0^s r_s^* ds \right) \varphi'_2 + \int_0^s \frac{E}{Gt} (S_{y0} u''''_1 + S_{x0} v''''_1 + S_{w0} \varphi''''_1) ds - (x - x^*) u'_2 - (y - y^*) v'_2 - r_n \varphi'_2 n$$

これに(27)式を代入すると

$$\bar{w}_2 = C_2 - u'_2 (x - x_0^*) - v'_2 (y - y_0^*) - (\bar{\omega} + r_n n) \varphi'_2 + \frac{E}{G} (B_y u''''_1 + B_x v''''_1 + B_w \varphi''''_1) \quad (30)$$

となる。ここで

$$B_y = \int_0^s \frac{1}{t} S_y ds \quad B_x = \int_0^s \frac{1}{t} S_x ds$$

$$B_w = \int_0^s \frac{1}{t} S_w ds \quad S_y = S_{y0} - S_{z1}$$

$$S_x = S_{x0} - S_{x1} \quad S_w = S_{w0} - S_{w1} \quad (31) a - f$$

と定義した。また, $\bar{\omega}$ は(29)式で定義したものがそのまま用いられる。

(30) 式において, 積分定数 C_2 は修正前の場合と同様に $C-D$ 間を仮想薄板で結ぶことにより原点 D 上の変位 W_2 で表わされ, さらに, そり体積零の条件より ω を(25)式で

定義すると, 修正後の軸方向変位は次式で与えられる。

$$\bar{w}_2 = w_2 - u'_2 x - v'_2 y - \omega \varphi'_2 + \frac{E}{G}$$

$$(B_y u''''_1 + B_x v''''_1 + B_w \varphi''''_1)$$

本解析では, さらに, 上式の u''''_1 , v''''_1 , φ''''_1 をつぎの新パラメーターで置き換えた。

$$u''''_1 = U \quad v''''_1 = V \quad \varphi''''_1 = \Phi \quad (32) a, c$$

この置換は, 後述のひずみ成分表示(28式参照)をみてわかるよう自由度としてせん断ひずみをとる, という意味があり, また, 高階の微分項を含むことによる煩雑さを解消している。(32)式によって, 部材軸方向変位は最終的に次式となる。

$$\bar{w} = w - u' x - v' y - \omega \varphi' + \frac{E}{G}$$

$$(B_y U + B_x V + B_w \Phi) \quad (33)$$

上式は, 任意点の軸変位 \bar{w} を原点の変位 w , u , v , φ , U , V , Φ で表示しており, (7)式の \bar{u} , \bar{v} と共に変位場を規定する。

(33)式より直ひずみ ε_z は次式となる。

$$\varepsilon_z = w' - u'' x - v'' y - \omega \varphi' + \frac{E}{G}$$

$$(B_y U' + B_x V' + B_w \Phi') \quad (34)$$

一方, せん断ひずみ γ_{sz} はつぎのようにして求められる。(33)式を(9)式に代入すると

$$\gamma_{sz} = -\frac{\partial \omega}{\partial s} \varphi' + \frac{E}{G} \frac{\partial}{\partial s} (B_y U + B_x V + B_w \Phi + r_s \varphi') \quad (35)$$

となる。上式中, 第1項は(25)式の定義を用いて

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} + \frac{\partial r_s}{\partial s} n$$

となり, さらに, (2) b 式, (19)式を使って次式のように変形できる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = r_s^* - \frac{1}{t} \frac{\int_{S_1} r_s^* ds}{\int_{S_1} \frac{1}{t} ds} - n$$

これを(35)式に代入し, (31)の定義式および $r_s = r_s^d + n$ を考慮すると

$$\gamma_{sz} = \theta \varphi' + \frac{E}{Gt} (S_y U + S_x V + S_w \Phi) \quad (36)$$

ここで, θ は次式で定義した。

$$\theta = 2n + \frac{1}{t} \frac{\int_{S_1} r_s^* ds}{\int_{S_1} \frac{1}{t} ds} \quad (37) a$$

以上(34)式, (36)式によって閉断面部材についてのひずみ成分が求められたが, 開断面部材に対してはつぎのよう

に簡単に求められる。(2)式に相当するものとして、 $\gamma_{sz}^* = 0$ から出発すると、これは $q = 0$ を意味しており、 q が変位の連続条件から得られたことを考えると、最終的に得られた結果において周積分を含む項をすべて零にすればよい。すなわち、(3)式、(8)式において S_y, S_x, S_w の代わりに S_{y0}, S_{x0}, S_{w0} を使い、また θ は次式で定義されるものを用いればよい。

$$\theta = 2n \tag{8}b$$

本法で得られたひずみ成分を一括して示すとつぎのようになる。

$$\begin{cases} \varepsilon_z = w' - u''x - v''y - \omega\phi'' + \frac{E}{G}(B_y U' + B_x V' + B_w \phi') \\ \gamma_{sz} = \theta\phi' + \frac{E}{Gt}(S_y U + S_x V + S_w \phi) \end{cases} \tag{9}$$

5 収束の確認

修正前のひずみ、すなわち従来の梁理論より得られるものを第1近似、それを一回修正した本法で導いたものを第2近似、それをさらに修正したものを第3近似とする。ここでは、単純梁および片持ち梁について、一方向曲げを受けるときのたわみと応力に関し、第2近似と第3近似の解を比較した。断面形状は、ねじりおよび他方向曲げとの連成を避けるため2軸対称とした。

(1) たわみの収束性

本法で得られたひずみ成分のうち一方向たわみのみに注目すると第2、第3近似について各々次式となる。

第2近似

$$\begin{cases} \varepsilon_z = -x u''_2 + \frac{E}{G} B_y U'_1 \\ \gamma_{sz} = \frac{E}{Gt} S_y U_1 \end{cases} \tag{10}a, b$$

第3近似

$$\begin{cases} \varepsilon_z = -x u''_3 + \frac{E}{G} B_y U'_2 - \frac{E^2}{G^2} J_y U'_3 \\ \gamma_{sz} = \frac{E}{Gt} S_y U_2 - \frac{E^2}{G^2 t} A_y U_3 \end{cases} \tag{10}a, b$$

ここで、第3近似のひずみ成分は、第2近似と同様の手順を繰り返して導いたもので、新パラメーターは次式のように定義した。

$$U_1 = u''_1, \quad U_2 = u''_2, \quad U_3 = U''_1 \tag{10}a - c$$

さらに、 γ_y, A_y の座標はつぎのように定義した。

$$\begin{aligned} \gamma_y &= \int_0^s \frac{1}{t} A_y ds & A_y &= A_{y0} - A_{y1} \\ A_{y0} &= \int_{S1}^S B_y t ds & A_{y1} &= \frac{\int \frac{1}{t} A_{y0} ds}{\int \frac{1}{t} ds} \end{aligned} \tag{11}a - d$$

(8)式および(9)式のひずみ成分より有限要素法と類似の方法⁶⁾を用いると剛性マトリックスが導かれる。剛性マトリックスを $[K]$ 、節点変位ベクトル $\{U\}$ 、節点力ベクトルを $\{P\}$ とすると

$$\{P\} = [K] \{U\} \tag{12}$$

という関係が得られ、 $[K]$ の逆マトリックスを求めることにより変位が求められる。(12)式において各々の成分は第2近似、第3近似に対しつぎのようになる。

第2近似

$$\begin{aligned} \{P\} &= [Q_i, M_i, H_{1i}, Q_j, M_j, H_{1j}]^T \\ \{U\} &= [u_{2i}, \beta_i, U_{1i}, u_{2j}, \beta_j, U_{2j}]^T \end{aligned} \tag{13}a, b$$

$$[K] = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,6} \\ & K_{2,2} & & \\ & & \text{Symm.} & \\ & & & K_{6,6} \end{pmatrix} \tag{14}$$

上式中、各要素は次式となる。

$$K_{1,1} = \frac{12}{l^3} E J_y \quad K_{1,2} = -\frac{6}{l^2} E J_y \quad K_{1,3} = 0$$

$$K_{1,4} = -\frac{12}{l^3} E J_y \quad K_{1,5} = \frac{6}{l^2} E J_y \quad K_{1,6} = 0$$

$$K_{2,2} = \frac{4}{l} E J_y \quad K_{2,3} = -\frac{1}{l} E g K_{yy}$$

$$K_{2,4} = -\frac{6}{l^2} E J_y \quad K_{2,5} = \frac{2}{l} E J_y$$

$$K_{2,6} = \frac{1}{l} E g K_{yy} \quad K_{3,3} = \frac{1}{l} E g g R_{yy} +$$

$$\frac{l}{3} E g D_{yy} \quad K_{3,4} = 0 \quad K_{3,5} = \frac{1}{l} E g K_{yy}$$

$$K_{3,6} = -\frac{1}{l} E g g R_{yy} + \frac{l}{6} E g D_{yy}$$

$$K_{4,4} = \frac{12}{l^3} E J_y \quad K_{4,5} = -\frac{6}{l^2} E J_y \quad K_{4,6} = 0$$

$$K_{5,5} = -\frac{4}{l} E J_y \quad K_{5,6} = -\frac{1}{l} E g K_{yy}$$

$$K_{6,6} = \frac{1}{l} E g g R_{yy} + \frac{l}{3} E g D_{yy}$$

第3近似

$$\{P\} = [Q_i, M_i, H_{2i}, H_{3i}, Q_j, M_j, H_{2j}, H_{3j}]^T$$

$$\{U\} = [u_{3i}, \beta_i, U_{2i}, U_{3i}, u_{3i}, \beta_j,$$

$$U_{2j}, U_{3j}]^T \quad (45) a, b$$

$$[K] = \begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,8} \\ & K_{2,2} & & \\ \text{Symm.} & & & K_{8,8} \end{pmatrix} \quad (46)$$

上式中、各要素は次式で与えられる。

$$K_{1,1} = \frac{12}{l^3} EJy \quad K_{1,2} = -\frac{6}{l^2} EJy \quad K_{1,3} = 0$$

$$K_{1,4} = 0 \quad K_{1,5} = -\frac{12}{l^3} EJy \quad K_{1,6} = \frac{6}{l^2} EJy$$

$$K_{1,7} = 0 \quad K_{1,8} = 0 \quad K_{2,2} = \frac{4}{l} EJy$$

$$K_{2,3} = -\frac{1}{l} EgKy y \quad K_{2,4} = \frac{1}{l} Eg\Gamma y y$$

$$K_{2,5} = -\frac{6}{l^2} EJy \quad K_{2,6} = \frac{2}{l} EJy$$

$$K_{2,7} = \frac{1}{l} EgKy y \quad K_{2,8} = -\frac{1}{l} Eg\Gamma' y y$$

$$K_{3,3} = \frac{1}{l} Eg\Gamma R y y + \frac{l}{3} EgD y y$$

$$K_{3,4} = -\frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \Delta y y - \frac{l}{3} Eg\Gamma \psi y y$$

$$K_{3,5} = 0 \quad K_{3,6} = \frac{1}{l} EgKy y$$

$$K_{3,7} = -\frac{1}{l} Eg\Gamma R y y + \frac{l}{6} EgD y y$$

$$K_{3,8} = \frac{1}{l} \frac{E^3}{G^4} \Delta y y - \frac{l}{6} Eg\Gamma \psi y y$$

$$K_{4,4} = \frac{1}{l} \frac{E^5}{G^4} \Omega y y + \frac{l}{3} \frac{E^4}{G^3} \pi y y$$

$$K_{4,5} = 0 \quad K_{4,6} = -\frac{1}{l} Eg\Gamma y y$$

$$K_{4,7} = \frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \Delta y y - \frac{l}{6} Eg\Gamma \psi y y$$

$$K_{4,8} = -\frac{1}{l} \frac{E^5}{G^4} \Omega y y + \frac{l}{6} \frac{E^4}{G^3} \pi y y$$

$$K_{5,5} = \frac{12}{l^3} EJy \quad K_{5,6} = -\frac{6}{l^2} EJy$$

$$K_{5,7} = 0 \quad K_{5,8} = 0 \quad K_{6,6} = \frac{4}{l} EJy$$

$$K_{6,7} = -\frac{1}{l} EgKy y \quad K_{6,8} = \frac{1}{l} Eg\Gamma y y$$

$$K_{7,7} = \frac{1}{l} Eg\Gamma R y y + \frac{l}{3} EgD y y$$

$$K_{7,8} = -\frac{1}{l} \frac{E^4}{G^3} \Delta y y - \frac{l}{3} Eg\Gamma \psi y y$$

$$K_{8,8} = \frac{1}{l} \frac{E^5}{G^4} \Omega y y + \frac{l}{3} \frac{E^4}{G^3} \pi y y$$

各要素において

$$Eg = \frac{E^2}{G} \quad Eg\Gamma = \frac{E^3}{G^2}$$

とし、また、断面諸量は次式で定義した。

$$Jy = \int_F x^2 dF \quad Ky y = \int_F By \cdot x dF$$

$$Dy y = \int_F \frac{Sy^2}{t^2} dF \quad Ry y = \int_F By^2 dF$$

$$I' y y = \int_F x \cdot \Gamma y dF \quad \Delta y y = \int_F By \Gamma y dF$$

$$\psi y y = \int_F \frac{Sy \Delta y}{t^2} dF \quad \Omega y y = \int_F \Gamma y^2 dF$$

$$\pi y y = \int_F \frac{\Delta y^2}{t^2} dF \quad (47) a - i$$

この剛性マトリックスを用いて片持ち梁先端に集中荷重が作用したときのたわみを計算すると表-1となる。断面形状、梁形式は図-3とし、1~5要素分割について計算した。

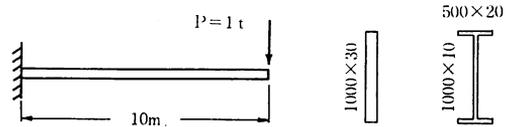


図-3

表-1

単位: cm

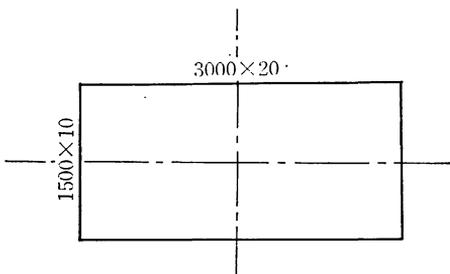
1 要 素	NODE NO.		1	2			
		矩形 断面	第2近似	0.0	0.6386		
第3近似			0.0	0.6386			
工形 断面		第2近似	0.0	0.2817			
		第3近似	0.0	0.2817			

2 要素	NODE NO.		1	2	3			
	矩形断面	第2近似	0.0	0.2000	0.6392			
		第3近似	0.0	0.2000	0.6392			
	工形断面	第2近似	0.0	0.0892	0.2831			
第3近似		0.0	0.0892	0.2831				
3 要素	NODE NO.		1	2	3	4		
	矩形断面	第2近似	0.0	0.0951	0.3321	0.6394		
		第3近似	0.0	0.0951	0.3321	0.6394		
	工形断面	第2近似	0.0	0.0430	0.1485	0.2837		
第3近似		0.0	0.0430	0.1485	0.2837			
4 要素	NODE NO.		1	2	3	4	5	
	矩形断面	第2近似	0.0	0.0554	0.2006	0.4051	0.6395	
		第3近似	0.0	0.0554	0.2006	0.4051	0.6395	
	工形断面	第2近似	0.0	0.0254	0.0906	0.1809	0.2840	
第3近似		0.0	0.0254	0.0906	0.1809	0.2840		
5 要素	NODE NO.		1	2	3	4	5	6
	矩形断面	第2近似	0.0	0.0362	0.1338	0.2770	0.4507	0.6396
		第3近似	0.0	0.0362	0.1338	0.2770	0.4507	0.6396
	工形断面	第2近似	0.0	0.0169	0.0610	0.1245	0.2011	0.2842
第3近似		0.0	0.0169	0.0610	0.1245	0.2011	0.2842	

表一のように、たわみに関し、第2近似と第3近似の解は一致し、本法における一回の修正で十分収束していることが確認された。

(2) 応力の収束性

従来の曲げ理論によるせん断応力は、軸応力とのつり合いより修正して求めている。すなわち、本法におけるせん断ひずみにフックの法則を適用して得られるものがそれに相当する。ここでは、本法の軸応力とつり合うよ



図一4

うさらにせん断応力を修正し曲げ理論によるものと比較した。断面形状は、図一4の2軸対称箱形断面とし、梁形式および荷重状態は図一5の4種類を用いた。

本法のひずみ成分(4)式(4)式より一方向たわみのみ考えると、応力は次式となる。

$$\begin{cases} \sigma_z = -x E u'' + \frac{E}{G} B_y U' \\ \tau_{sz} = \frac{E}{t} S_y U \end{cases} \quad (48) a, b$$

断面力として

$$M_y = \int_F \sigma_z x \, dF \quad T_u = \int_F \tau_{sz} \frac{E}{G} \frac{S_y}{t} \, dF$$

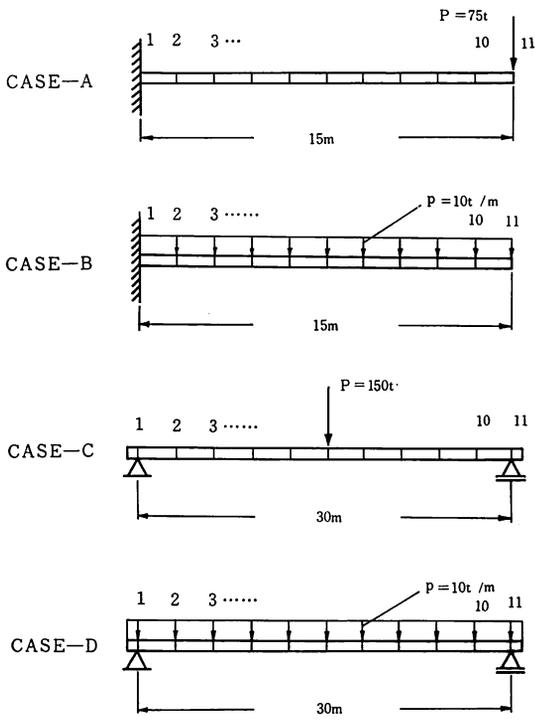
$$H_y = \int_F \sigma_z \frac{E}{G} B_y \, dF \quad (49) a - c$$

と定義すると、(48)式を(49)式に代入し断面力と変位の関係が得られる。すなわち次式となる。

$$M_y = -E J_y u'' + E_g K_{yy} U'$$

$$T_u = E_g D_{yy} U$$

$$H_y = -E_g K_{yy} u'' + E_{gg} R_{yy} U' \quad (50) a - c$$



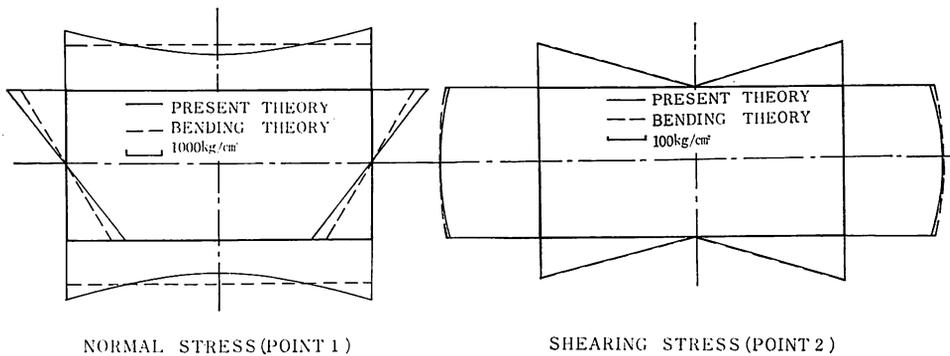
図—5

前式より変位を断面力で表示し(49)式に代入すると応力は、次式のように断面力で表わされる。

$$\sigma_z = n_y \left\{ x - B_y \frac{K_{yy}}{R_{yy}} \right\} \frac{M_y}{J_y} - n_y \left\{ \frac{K_{yy}}{J_y} (x - B_y) \right\} \frac{G}{E} \frac{H_y}{R_{yy}} \tau_{sz} = \frac{G}{E} \frac{S_y}{t} \frac{T_u}{D_{yy}} \quad (51) a, b$$

ここで

$$n_y = \frac{1}{1 - \frac{K_{yy}^2}{J_y R_{yy}}} \quad (52)$$



図—6 CASE—A の応力分布

とし、断面諸量は(4)式で定義したものをを用いた。

(51) a 式の軸応力を(1)式のつり合い式に代入し、以下同様の手順を繰り返すと修正せん断応力として次式が導かれる。

$$\tau_{sz} = -\frac{n_y}{t} \left\{ (S_y - A_y \frac{K_{yy}}{R_{yy}}) \frac{M_y'}{J_y} - \left(\frac{K_{yy}}{J_y} (S_y - A_y) \right) \frac{G}{E} \frac{H_y'}{R_{yy}} \right\} \quad (53)$$

ここで座標 S_y は(28), (29), (31)式で、座標 A_y は(4)式で定義した。(51)式、(53)式中、 M_y , H_y , T_u は部材軸方向 (z 方向) の関数、 x , S_y , B_y , A_y は横断面内に関する変数であり、他のものは断面形状によって決まる定数である。本法による応力は(51) a 式(53)式で与えられ、曲げ理論のせん断応力は(51) b 式で求められる。また、修正前の軸応力は(29)式より前述と同様に変位を断面力で表示しと求められる。それを図—5の各々の場合について示すと図—6～9となる。その際、 M_y , H_y , T_u , M_y' , H_y' は、微分方程式を解くことにより得られる。例えば、(51)式については本法で導いたひずみ成分に仮想仕事の原理を適用して得られる微分方程式および境界条件⁷⁾より各々の解を求め(50)式に代入して求められる。

図を見てわかるように第2近似と第3近似のせん断応力分布はほぼ一致しており、特に単純梁においては有効数字4桁まで完全に一致している。さらに、軸応力分布に関し、一定分布とした従来の曲げ理論に対し、本法を用いると shear lag の影響が顕著に現われるのが認められる。

以上、たわみおよび応力分布に関し第2近似と第3近似の一致が認められ、解は収束していると判断し、本法の場合、一回の修正で終わった。

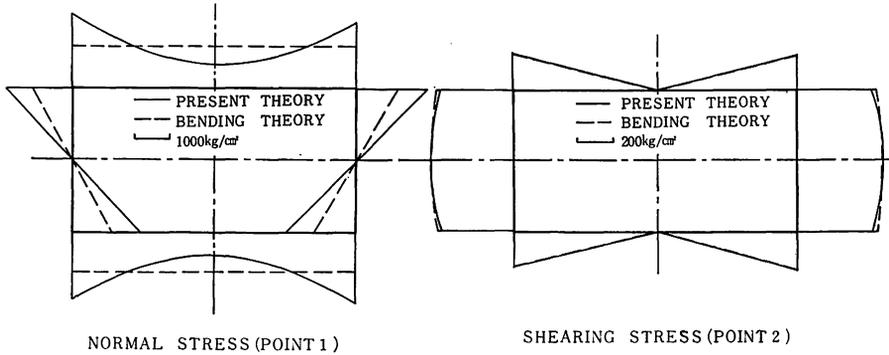


図-7 CASE-B の応力分布

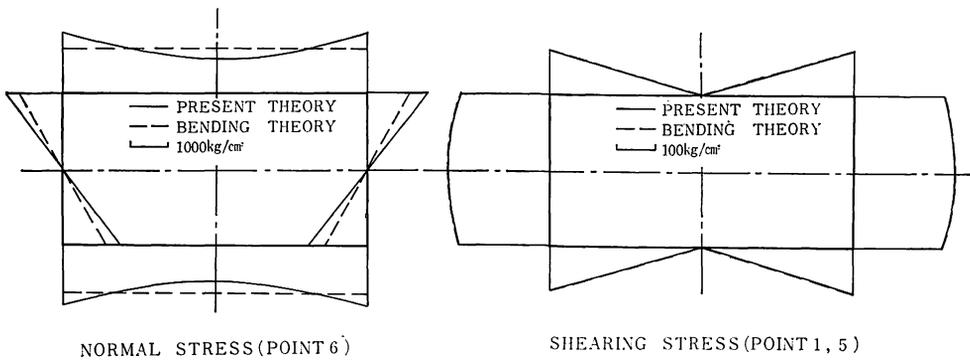


図-8 CASE-C の応力分布

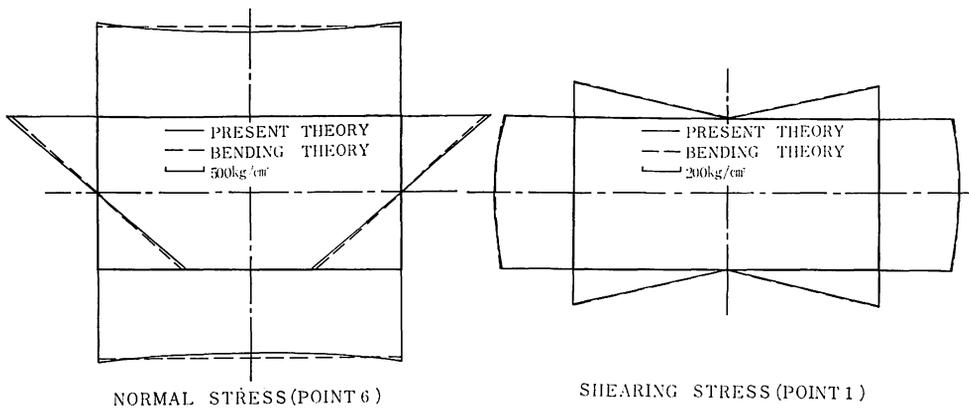


図-9 CASE-D の応力分布

6 ま と め

本解析の特長として2つの点があげられる。第一は修正前と修正後の変位を区別した点で、これが収束を早める一因となっているように思われる。すなわち、(3)式において第1項から第4項までは従来の梁理論と形は一致するが本法では修正後の変位として定義しているためす

で修正項の役割を果たしているからである。第二の特長は、新パラメーターで置換した点で、これは本文でも述べたように自由度としてせん断ひずみをとることを意味している。しかしこの新パラメーターに対応する力として定義した、例えば(4a)式の H_y などとはただUに対応する力として考えたもので、実際の物理量としてのHの取扱いが今後の課題と思われる。

最後に、本研究を行なうにあたり、終始御指導頂きま

した秋田大学鉱山学部土木工学科稼農知徳教授に心から感謝の意を表する次第です。

参 考 文 献

- 1) Kollbrunner, Hajdin; Dünnwandige Stäbe, Springer-Verlag Band 1, 1972年, P 49
- 2) Timoshenko, Gere 著, 吉峯, 前沢共訳; 材料力学本論, コロナ社, 1975年, pp219~226
- 3) Reissner; Analysis of shear lag in Box beams by the Principle of minimum potential energy, Journal of the Aeronautical Sciences, pp268~278, 1946年
- 4) 川井, 藤谷; 梁の精密化に関する二, 三の試み(その1) 生産研究, 25巻6号, P 214, 1973年
- 5) 西野他; 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会 論文報告集, 225号, pp 1~15, 1974年
- 6) 稼農, 薄木, 堀江; 薄肉断面直線材のせん断変形を考慮した剛性マトリックス, 土木学会東北支部研究発表会講演概要, pp29~30, 1976年
- 7) 稼農, 薄木, 堀江; 薄肉直線材のせん断変形解析, 応用力学連合会講演概要, pp425~426. 1976年