

非定常線形過程における時系列解析

長谷部 正 彦

Tine series analysis by linear non-stationary models

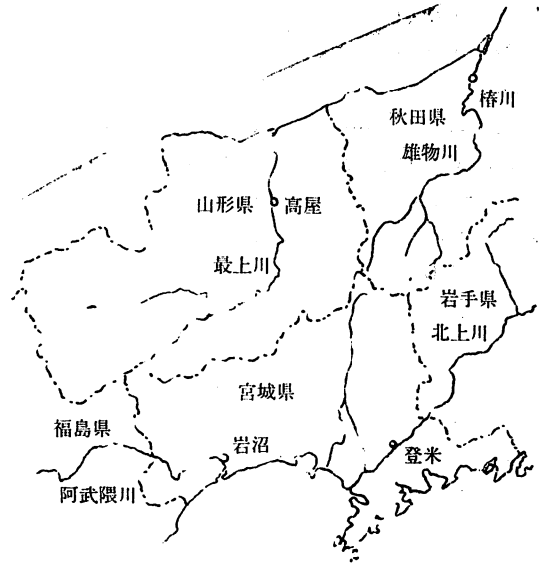
Masahiko HASEBE

(昭和51年10月31日受理)

1. まえがき

本解析では、Box&Jenkins の非定常線形理論を水文時系列に適用した。それによると非定常時系列では level 等が時間とともに変化する。しかし変化するものを除くと、統計的な性質が時間に依存しない性質（擬定常性）をもつ過程（非定常線形過程）となる。それ故、この過程では適当な差分をとることによって定常過程として扱うことが可能である。本文では、始めにこの理論を紹介し、この過程を東北の各河川流量に適用した場合の解析効果と定常過程のときの解析効果を求めて比較し、検討をしてみた。

適用河川は、図一に示しているように雄物川水系樺川地点、最上川水系高屋地点、阿武隈水系岩沼地点、北上川水系登米地点で観測された月平均流量系列を用いた。観測期間は1953~1972年である。



図一

2. 自己回帰-移動平均混合過程（定常過程）

2.1 定常性と転換性(invertibility)

自己回帰過程 (Auto regressive Process) と移動平均過程 (Moving average Process) の両過程を混合した過程を ARMA モデル (Mixed Auto regressive-Moving average Process) である。

今、混合過程で AR 過程は P 次, MA 過程は q 次の両過程に従うとすれば, ARMA (p, q) と表現され, 時系列 Z は, (1)式で表わされる。

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \dots(1)$$

a_t : 白色雑音

(1)演算 j を導入すれば, (2)式となる。

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)a_t \quad \dots(2)$$

ここで $\phi(B)$; 自己回帰演算子, $\theta(B)$; 移動平均演算子

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$$

$$BZ_t = Z_{t-1}$$

また, ARMA 過程は, 次の様に考えることもできる。

系列 Z が P 次の AR 過程に従う。

$$\theta(B)Z_t = \ell_t \quad \dots(3)$$

そして系列 ℓ_t が q 次の MA 過程に従う。

$$\ell_t = \theta(B)a_t \quad \dots(4)$$

(3), (4)により前出の(2)式になる。

以上の様にして混合過程を表現できる。

次に定常性と転換性を考えると、定常である条件は、(3)式で $\phi(B) = 0$ のすべての根が単位円の外側に存在することである。(4)式から、下記の(5)式になるための条件(転換性)は、

$$a_t = \theta^{-1}(B)\ell_t \quad \dots(5)$$

$\theta(B) = 0$ のすべての根が単位円の外側に存在しなければならない。すなわち混合過程においての定常性と転換性の成立する条件は、 $\phi(B) = 0$, $\theta(B) = 0$ のすべての根が単位円の外側に存在することである。

2.2 自己相関々数

ARMA (p, q) の自己相関々数は、AR 過程のそれを

求める方法と同じである。(1)式に Z_{t-k} をかけて、その期待値をとるとよい。

$$E[Z_t Z_{t-k}] = \phi_1 E[Z_{t-1}, Z_{t-k}] + \dots + \phi_p E[Z_{t-p}, Z_{t-k}] \\ + E[a_t Z_{t-k}] - \theta_1 E[a_{t-1} Z_{t-k}] - \dots - \theta_q E[a_{t-q} Z_{t-k}]$$

ここで、 $E[Z_t Z_{t-k}] = C_k$ 、自己共分散

$$E[a_t Z_{t-k}] = C_{za}(k), \text{ 相互共分散}$$

で表わすと、前式は

$$C_k = \phi_1 C_{k-1} + \dots + \phi_p C_{k-p} + C_{za}(k) - \theta_1 C_{za}(k-1) - \dots - \theta_q C_{za}(k-q) \quad (6)$$

となる。ここで、次の条件より(6)式は

$$\left. \begin{aligned} k > 0 \text{ では } C_{za}(k) &= 0 \\ k \leq 0 \text{ では } C_{za}(k) &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$k \geq q+1$ では

$$C_k = \phi_1 C_{k-1} + \dots + \phi_p C_{k-p}$$

となり、 C_0 (分散) で割ると系列相関係数で表現される。

$$r_k = \phi_1 r_{k-1} + \phi_2 r_{k-2} + \dots + \phi_p r_{k-p}$$

演算子で示すと、次の様になる。

$$\phi(B)r_k = 0 \quad (k \geq q+1)$$

次に分散を求めると $k=0$ の時で、(6)式に $k=0$ を代入すると

$$C_0 = \phi_1 C_{-1} + \phi_2 C_{-2} + \dots + \phi_p C_{-p} + C_{za}(0) - \theta_1 C_{za}(-1) - \dots - \theta_q C_{za}(-q)$$

ここで自己相関々数の性質により $C_k = -C_{-k}$ 、となりまた $C_{za}(0) = E[a_t Z_t]$ は、(1)式に a_t をかけて、その期待値をとると

$$E[a_t Z_t] = \phi_1 E[a_t Z_{t-1}] + \dots + \phi_p E[a_t Z_{t-p}] + E[a_t a_t] - \theta_1 E[a_t a_{t-1}] - \dots - \theta_q E[a_t a_{t-q}]$$

となり、ここで

$$E[a_t Z_{t-i}] = C_{za}(i), \quad i > 0 \text{ より } C_{za}(i) = 0, \quad a_t \text{ は}$$

白色雑音なので、 $E[a_t a_{t-i}] = 0 (i \neq 0)$ となる。

故に $E[a_t Z_t] = E[a_t a_t] = \sigma_a^2$ となり、分散は

$$C_0 = \phi_1 C_1 + \phi_2 C_2 + \dots + \phi_p C_p + \sigma_a^2 - \theta_1 C_{za}(-1) - \dots - \theta_q C_{za}(-q)$$

となり求まる。

2.3 ARMA (1, 1) の解析

$p=q=1$ とすると(1)式は、(7)式となる。

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (7)$$

演算子を導入すれば、(7)式は次の様に變形される。

$$(1 - \phi_1 B) Z_t = (1 - \theta_1 B) a_t \quad (8)$$

ARMA (1, 1) の定常性と転換性は、 $\phi(B) = 0$ 、

$\theta(B) = 0$ の根が単位円の外側にあることである。

定常性に関しては、 B の多項式と考えると

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B) = 0$$

上の条件から $|B| > 1$ であるので

$$\left| \frac{1}{\phi_1} \right| > 1 \iff 1 > |\phi_1|$$

となる。

同様に転換性に関しても、 $1 > |\theta_1|$ となる事が理解できる。故に ARMA (1, 1) の定性と転換性の条件は下記の通りである。

$$\left. \begin{aligned} -1 < \phi_1 < 1 \\ -1 < \theta_1 < 1 \end{aligned} \right\}$$

自己相関々数は、前出の式から

$$C_0 = \phi_1 C_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 C_{za}(-1) \quad (k=0)$$

$$C_1 = \phi_1 C_0 + C_{za}(1) - \theta_1 C_{za}(0) \\ = \phi_1 C_0 - \theta_1 \sigma_a^2 \quad (k=1)$$

$$C_k = \phi_1 C_{k-1} \quad (k \geq 2)$$

(7)式に a_{t-1} をかけて、その期待値をとると

$$E[a_{t-1} Z_t] - \phi_1 E[a_{t-1} Z_{t-1}] = E[a_t a_{t-1}] - \theta_1 E[a_{t-1} a_{t-1}]$$

ここで $E[a_{t-1} Z_t] = C_{za}(-1)$

$$E[a_{t-1} Z_{t-1}] = C_{za}(0) = \sigma_a^2$$

$$E[a_t a_{t-1}] = 0$$

$$E[a_t a_t] = \sigma_a^2$$

より、 $C_{za}(-1) - \phi_1 \sigma_a^2 = -\theta_1 \sigma_a^2$

$$\therefore C_{za}(-1) = (\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2 \quad (8)$$

(8)式より、自己相関々数は、次の様にして求める。

$$C_0 = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2 \quad (k=0)$$

$$C_1 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2 \quad (k=1)$$

$$C_k = \phi_1 C_{k-1} \quad k \geq 2$$

また自己相関係数を求める時には、 $C_1/C_0 = r_1$ 、 $C_2/C_0 = r_2$ を用いると、($r_0 = 1$)

$$r_1 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1} \quad (9)$$

$$r_2 = \phi_1 r_1$$

となる。

ARMA (1, 1) で定常性と転換性の条件が満たされていると、 r_1 と r_2 の関係は、次の条件をみたされていなければならない。

$$|r_1| < |r_2|$$

$$r_2 > r_1 (2r_1 + 1) \quad r_1 < 0$$

$$r_2 > r_1 (2r_1 - 1) \quad r_1 > 0$$

実際の計算に於いて、パラメーター ϕ_1 、 θ_1 を求めるときには、 r_1 、 r_2 が既知であればよいが、既知でないときは r_1 、 r_2 の代わりに標本自己相関係数、 r_1 、 r_2 を使用して(9)式で初期値を決定して σ_a^2 を最小にする様に評価する場合と ϕ_1 、 θ_1 をあらかじめ仮定して Estimate していく場合がある。

3. 非定常線形過程

ある時系列が非定常線形過程であるならば、適当な差分をとると、定常過程としてあつかうことが可能である。

一般にこの過程は、ARIMA (Autoregressive-integrated moving average process) モデルとも呼ばれ、ARIMA (p, d, q) と表現される。

p は AR 過程の次数, q は MA 過程の次数, d は d 個の定差である。またこの過程に従う時系列は、擬似定常性 (homogeneity) の性質をもつ時系列とも考えられる。

さて自己帰帰演算子 $\phi(B)$ を使って説明する。

(3)を参考にして、(10)式を得る。

$$\phi(B) Z_t = \theta(B) a_t \dots\dots\dots (10)$$

ここで $\phi(B) = 0$ の根を次の3つに分類することができる。

- (1) $\phi(B) = 0$ のすべての根が単位円の外側に存在する。
- (2) $\phi(B) = 0$ のすべての根が単位円の内側に存在する。
- (3) $\phi(B) = 0$ のいくつかの根は単位円上で、残りの根は単位円の外側に存在する。

以上の(1), (2), (3)に区別できる。

(1)の場合が $\phi(B) = \varphi(B)$ で定常線形過程であり、(2)の場合は、非定常過程であるが、擬似定常性をもたない過程である。(3)の場合が、本論文でとり扱う非定常線形過程なのである。

(3)の定数で仮りに d 個の根が単位円上でであると非定常線形過程の自己帰帰演算子 $\phi(B)$ は、次の様になる。

$$\phi(B) = \phi(B) (1-B)^d$$

(10)式に代入すると

$$\phi(B) Z_t = \phi(B) (1-B)^d Z_t = \theta(B) a_t \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで $\phi(B)$ は、定常自己帰帰演算子である。

d = 0 では、(11)式は

$$\phi(B) Z_t = \theta(B) a_t$$

となり定常線形過程となる。

また演算子 $\nabla = 1 - B$ を導入すれば(11)式は

$$\phi(B) \nabla^d Z_t = \theta(B) a_t \dots\dots\dots (12)$$

となる。ここで、 $W_t = \nabla^d Z_t$ とおけば、(12)式は、(13)式となる。

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t \dots\dots\dots (13)$$

ARIMA モデルをブロック・ダイアグラムで表現すると図-2になる。

次に簡単な ARIMA (p, d, q) を示す。

ARIMA (0, 1, 1) Process

$$\nabla Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

昭和52年2月

ARIMA (0, 2, 2) Process

$$\nabla^2 Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

ARIMA (1, 1, 1) process

$$\nabla Z_t - \phi_1 \nabla Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

また、 $\nabla^d Z_t = \theta(B) a_t$ のときには、特別に

IMA (Integrated moving average process) (p, d, q) と表現される。

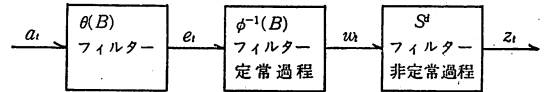


図-2

ここでSは和演算子である。

4. 適用例

適用河川は、まえがきに述べた様に、椿川、高屋、岩沼、登米の各地点である。

椿川、高屋、登米地点での河川流量時系列においては、5月に融雪期があり、ピーク月流量が飛びぬけて大きく季節性が顕著にでてくる。他方岩沼流量には、融雪期がなく、むしろ、6~7頃の梅雨期、それから9月頃の台風期の雨量の影響がでて、季節性が弱い。

以上の様な気象特性を持つ4河川流量である。時系列理論では、一般に周期成分、傾向成分、stochastic成分に分けられることは知られている。

この本文では、4河川流量時系列から周期成分、傾向成分を除いた系列に、定常理論と非定常理論を適用した。表-1に各地点のZ, ∇Z_t の自己相関係数を示す。

また表-2に各パラメーターの Estimate したものを、

表-3に各河川に適用したモデル例を示す。

また解析効果 (全分散に含まれる規則成分の分散の割合) を表-4に示す。

解析効果を求めるにあたっては、AR 過程で、一次の場合 (1次の Markov 過程に、まず K^2 を求めると)

$$K^2 = S^2(a) / S^2(Z) = 1 - \phi_1 r_t = 1 - \phi_1^2 (\phi_1 = +r_t)$$

となり、故に解析効果は

$$1 - K^2 = \left\{ \frac{S^2(Z) - S^2(a)}{S^2(Z)} \right\} = \phi_1^2$$

となる。 $S^2(\)$ は、標本分散である。

MA 過程では (1次について)

$$K^2 = 1 / (1 + \theta^2)$$

$$\text{故に } 1 - K^2 = 1 - \frac{1}{1 + \theta^2} = \frac{\theta^2}{1 + \theta^2}$$

となる。

定常線形過程については、各地点毎に少し異なるが、

AR (1), MA (1), ARMA (1,1)については、一地点について考察するとほとんど変化していないことが理解される。

しかし定常過程と非定常過程とで比較すると解析効果に関しては、かなり向上するようになる。

またパラメーター、 $\phi_1, \theta_1, \sigma_a^2$ を理論式から求めた場合と、くり返し計算で推定したときとは、定常線形の場合には一致する。

今後の検討としては、非定常線形理論を拡張した seasonal model に、いろいろな時系列を適用してみたい。

参考文献

- 1) Box&Jenkins ; Time series analysis forecasting

表-1

地点	Z の系列			FZ の系列		
	τ_1	τ_2	C_0	τ_1	τ_2	C_0
樺川	0.3525	0.2512	1.0014	-0.4281	-0.0394	1.2933
高屋	0.2146	0.0534	1.0126	-0.4071	0.0383	1.5920
登米	0.1973	0.1290	1.0028	-0.4640	0.0369	1.5866
岩沼	0.1532	0.1109	1.2058	-0.4741	-0.0335	2.0480

and control Holden-Day, 1970

- 2) 岸 力；水工学に関する夏朝研修講義集，PA-6-1~PA-6-27, 1975
- 3) 長谷部正彦，中村英一：第26回年講，p425~428, 1971
- 4) 長谷部正彦：第31回年講，p149, 1976

表-2

	樺川 ARIMA (1,1,1)		高屋 ARIMA (1,1,1)	
	θ	σ_a^2	θ	σ_a^2
0	0	-	0	-
1	0.4784	1.4063	0.3358	1.4842
2	0.5879	1.1444	0.3736	1.3338
3	0.6438	1.0451	0.3826	1.3025
4	0.6767	0.9942	0.3849	1.2947
5	0.6974	0.9646	0.3855	1.2927
6	0.7111	0.9461	0.3857	1.2921
7	0.7203	0.9340	0.3857	1.2920
8	0.7266	0.9259	-	-
9	0.7309	0.9204	-	-
10	0.7340	0.9166	-	-
11	0.7361	0.9139	-	-

表-3

<u>樺川</u>	$(1 - 0.4071B)FZ_t = a_t$Model 3
ARMA (1, 1) Model 1	$(1 + 0.0940B)FZ_t = (1 - 0.3859B) a_t$Model 4
$(1 - 0.7126B) Z_t = (1 - 0.4221B) a_t$	
<u>登米</u>	
IMA (0, 1, 1) Model 2	$(1 - 0.6536B) Z_t = (1 - 0.4804B) a_t$Model 1
$FZ_t = (1 - 0.5646B) a_t$	$FZ_t = (1 - 0.6761B) a_t$Model 2
ARIMA (1, 1, 0) Model 3	$(1 - 0.4640B) F_t = a_t$Model 3
$(1 - 0.4281B) FZ_t = a_t$	$(1 + 0.0795B) FZ_t = (1 - 0.5268B) a_t$Model 4
ARIMA (1, 1, 1) Model 4	
$(1 - 0.0920B) FZ_t = (1 - 0.7413B) a_t$	
<u>高屋</u>	
$(1 - 0.2498B) Z_t = (1 - 0.0357B) a_t$Model 1	$(1 - 0.7238B) Z_t = (1 - 0.5916B) a_{At}$Model 1
$FZ_t = (1 - 0.5152B) a_t$Model 2	$FZ_t = (1 - 0.7197B) a_t$Model 2
	$(1 - 0.4640B) FZ_t = a_t$Model 3
	$(1 - 0.0707B) FZ_t = (1 - 0.4621B) a_t$Model 4

表-4

	定常線形過程			非定常線形過程		
	AR (1)	MA (1)	ARMA (1, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)
樺川	0.1242	0.1454	0.1466	0.2417	0.8320	0.2981
高屋	0.0460	0.0484	0.0462	0.2098	0.1657	0.1885
岩沼	0.0234	0.0242	0.0355	0.3412	0.2247	0.1167
登米	0.0389	0.0405	0.0500	0.3138	0.2152	0.2701