グラフ理論による回路網解析
(第 1 報)

柳　原　昌　輝

Electronic Circuit Analysis on Graph Theory
(1st Report)

Masateru YANAGIWARA

(昭和51年10月30日受理)

1. まえがき

現代数学の一分野に，図形の大きさや形にとらわれず図形を分類しようとしているトポロジー理論がある。その中で，図形を構成している点と線の関係に焦点をおいて論じたものがグラフ理論である。グラフ理論の応用は産業，技術の情報化，さらに社会科学の分野においても複雑な問題の解析に直観的で，理解が容易である方法として，ますます利用されている。

さて，電気工学において，回路網解析を行なう場合，キルヒホッフの法則を用い，多元連立方程式をたてて解いていたが，このグラフ理論を応用し，コンピュータを利用して解くことにより，さらに複雑な回路網解析を行なうことができるのがわかる。

グラフ理論を基礎とし，多くの素子と電圧源，電流源などで構成される回路網を「点」と「線」の連結と考え，グラフとして描き直し（モデル化）解析するプログラムを作成した。そして与えられた電気回路について回路素子，電圧源など，それに回路の接続状態を行列表現して演算し，枝電圧，枝電流などを求めてみた。

2. グラフ理論

2—1 グラフとは

電気回路網を各要素の接続状態から抽象化すると「点」と「線」からなるグラフと考えられる。点は接続端子，線は回路素子を表わしている。この点を節点（Node），線分を枝（Branch）と呼んでいる。この節点と枝の接続関係を表わしたものがグラフである。グラフにおいて，枝の方向を考慮するとき有向グラフといい，そうでないとき無向グラフという。

本研究では線形回路を考え，能動素子として電圧源を考え，初歩的解析に限って研究を進めた。

図１は電気回路網の一例であり，これをグラフ化したものを図２に示す。

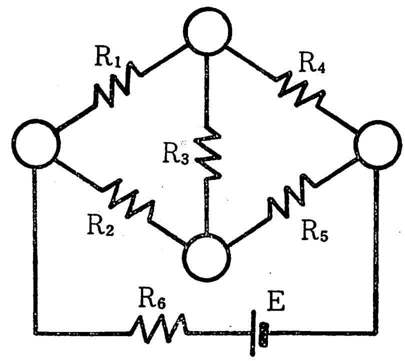

図　1

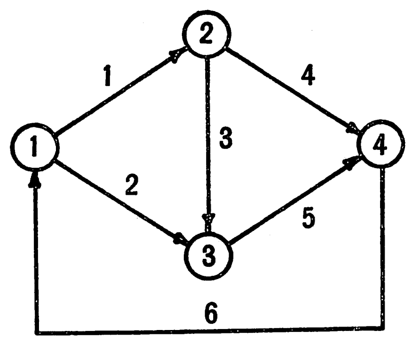

図　2

2—2 グラフ理論で使用される用語

(1) 木（tree）

1つのグラフにおいて，各節点が連結で閉路をもたなければ，これを木という。

(2) 補木（cotree）

1つのグラフにおいて，木に含まれない枝の集合を補木という。

(3) 閉路（loop）

1つのグラフにおいて，1つの木に補木の枝を1つずつ，つけ加えてできるグラフを閉路という。

(4) 基本網目（fundamentalmesh）

閉路の中，１つの閉じたループをつくる枝の集合を基本網目という。

(5) カットセット（cut-set）

１つのグラフにおいて，ある枝の組を取ると回路が２つに分かれ，１本でも枝を残すと２つに分かれないとき，この枝の組をカットセットという。

(6) 基本カットセット（fundamentalcut-set）

補木に木の枝（幹）を１つずつ加えてできるカットセットの組を基本カットセットという。

グラフを構成する節点数をn，枝数をmとすると，

木の枝数＝n－１
補木の枝数　＝ m－(n－１)
基本網目の個数　＝ m－(n－１)
基本カットセットの個数　＝ n－１

となることがわかる。

図３において，実線は木，点線は補木の１例であり，図４は閉路，図５には基本網目の１例を示している。

3. トポロジカル　マトリクスの求め方

3—1 トポロジカル　マトリクスとは

トポロジカル　マトリクスとは，グラフを構成している節点と枝の連結関係，基本網目や基本カットセットとこれらに関連している枝との関係を表わす種々の行列である。この行列は，グラフの構造を数値で表わすもので解析に都合が良い。トポロジカル　マトリクスには次の３種がある。

(1) 接続行列(A)：節点と枝の関係
(2) 閉路行列(B)：基本網目と各枝の関係
(3) カットセット行列(C)：基本カットセットと各枝の関係

3—2 接続行列（A）

節点と枝の接続関係を表わすものであるが，これは各枝の始点と終点の関係で表わすことができる。節点番号を行，枝番号を列にとり，行列の要素は次の様にしてきめる。

(1) 節点ｉが枝ｊの始点のとき　$A_{ij}=1$
(2) 節点ｉが枝ｊの終点のとき　$A_{ij}=-1$
(3) 節点ｉと枝ｊが接続していないとき　$A_{ij}=0$

これらから図２のグラフの接続行列(A)を求めたものを表１に示す。

この接続行列(A)のランクは（n－1）であるため，行数を（n－1）として取り扱ってよい。ということは回路において，１つの節点をアースした場合（図６），接続行列(A)は表２となり，表１の第４行（接地した節点行）を取り除いたものとなる。

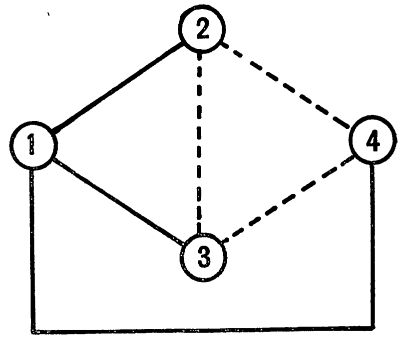

図　3

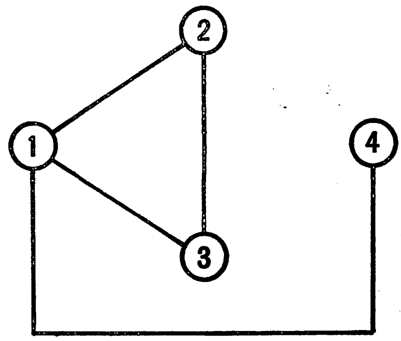

図　4

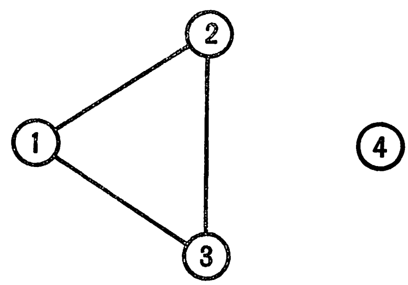

図　5

表　1

節点 i ＼ 枝 j	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	−1
2	−1	0	1	1	0	0
3	0	−1	−1	0	1	0
4	0	0	0	−1	−1	1

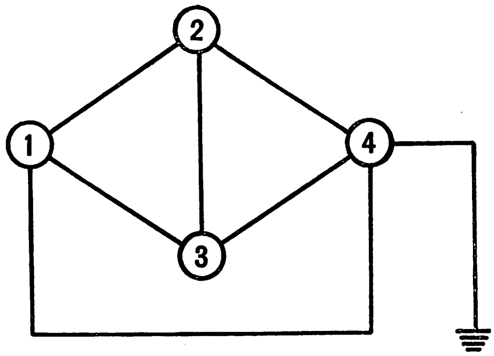

図　6

表　2

節点 i＼枝 j	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	−1
2	−1	0	1	1	0	0
3	0	−1	−1	0	1	0

3—3　閉路行列（B）

基本網目と枝の関係を表わすものである。
この基本網目に1つ含んでいる補木の向きに基本網目の方向を決める。これを図7に示す。

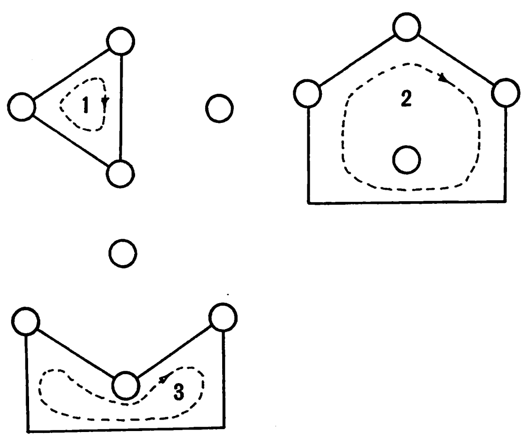

図　7

閉路行列(B)は図7の閉路番号を行に，枝番を列にとり，次の様にして行列の要素を決める。

(1)　基本網目 i に枝 j が基本網目の向きと同方向に含まれるとき　$B_{ij}=1$

(2)　基本網目 i に枝 j が基本網目の向きと逆方向に含まれるとき　$B_{ij}=-1$

(3)　基本網目 i に枝 j が含まれないとき　$B_{ij}=0$

これらから図2のグラフの閉路行列(B)を求めたものを表3に示す。

この行列において列を入れかえ，木と補木の部分に分けたものが表4であり，補木の部分は単位行列（Bc）となる。

表　3

閉路 i＼枝 j	1	2	3	4	5	6
1	1	−1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	1	1

表　4

閉路 i＼枝 j	1	2	6	3	4	5
1	1	−1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1
	Bt			Bc		

3—4　カットセット行列（C）

各枝の基本カットセットへの含まれ方を表わしている。基本カットセットは，木の枝を1つ含むため，その枝方向に基本カットセットの向きを決める。これらを表わしているのが図8である。

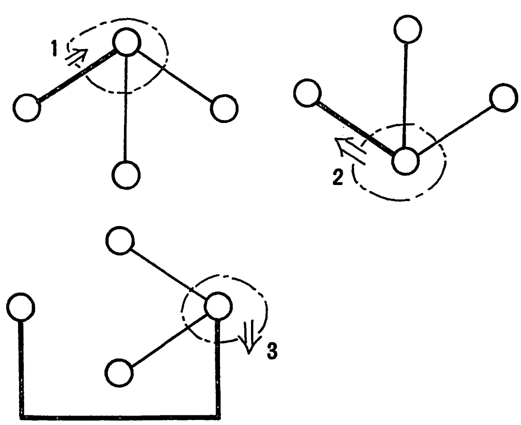

図　8

カットセット行列(C)は，カットセット番号を行，枝番号を列にとり，次の様にして行列の要素を決める。

(1)　カットセット i に枝 j がカットセットの向きと同方向で含まれるとき　$C_{ij}=1$

(2)　カットセット i に枝 j がカットセットの向きと逆方向で含まれるとき　$C_{ij}=-1$

(3)　カットセット i に枝 j が含まれないとき　$C_{ij}=0$

表　5

カットセットi＼枝j	1	2	3	4	5	6
1	1	0	−1	−1	0	0
2	0	1	−1	0	1	0
3	0	0	0	−1	−1	1

表　6

カットセットi＼枝j	1	2	6	3	4	5
1	1	0	0	−1	−1	0
2	0	1	0	−1	0	1
3	0	0	1	0	−1	−1
	Ct			Cc		

表　7

解析法	使用行列	基本的変数	使用法則
接点解析法	A	節点電位	KCL
閉路解析法	B	閉路電流	KVL
カットセット解析法	C	枝電圧	KCL

これらから図2のグラフのカットセット行列(C)を求めたものを表5に示す。

この行列において，列を入れかえて木と補木の部分に分けたものを表6に示す。Ctは単位行列となる。

なお，閉路行列(B)，カットセット行列(C)とも接続行列(A)から求めることができる。

3—5　木の求め方

接続行列は入力データより簡単に求められるが，閉路行列，カットセット行列は接続行列より求めた方が早い。そこで問題となるのが木の求め方である。木を求めるにはまず，並列な枝を1つの数で代表させ，次に接続する枝の最も多い節点を基準としてそれに接続する枝をとり1つのグラフを作る。このときまだ接続されていない節点がなければそれで木は完成する。

また，節点が残っていたら，それらに接続する枝を1つずつとって前のグラフに付けていき，すべての節点を結び，木をつくる。次にこの手順のアルゴリズムを記する。

(1) 並列枝があるか？
　(a) ある場合，その中の1本を残し，他を補木として(2)へいく。
　(b) ない場合，(2)へいく。
(2) 接続する枝数の最も多い節点をさがし，それに接続する枝を木として登録，結ばれた節点も登録する。
(3) すべての節点が結ばれたか？
　(a) 結ばれた場合，木は完成し(5)へ
　(b) 残っている場合，(4)へ
(4) その節点に接続する枝で木に登録されていないものを木に登録，(3)へ
(5) 木に登録されていない枝を補木として登録

4.　回路解析

4—1　各解析法について

電気，電子回路においては，キルヒホッフの電流則（KCL），電圧則（KVL）および，オームの法則が成立する。トポロジカル　マトリクスはKCL，KVLを適用でき，接続行列(A)は解析の基本的変数として節点電位をとり，KCLを利用する節点解析法に用いられる。閉路行列(B)は，解析の基本的変数として閉路電流をとり，KVLを利用する閉路解析法に用いられる。カットセット行列(C)は，基本的変数として枝電圧をとり，KCLを利用するカットセット解析法に用いられる。表7にこれらをまとめてみた。

4—2　解析に用いられる各行列

1) 接続行列(A)
2) 閉路行列(B)
3) カットセット行列(C)
4) 枝電圧行列（V）：図9のように各枝電圧を決めると $V=[V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6]^T$ のようになる。
5) 枝電流行列（I）：図9のように各枝電流を決めると $I=[I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6]^T$ のようになる。
6) 電圧源行列（E）：図1のように電圧源が与えられると $E=[E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6]^T$ のようになる。
7) 電流源行列（J）：図1のように電圧源が与えられたら，図13のように電流源に等価変換し，次のように表わす。 $J=[J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6]^T$
　但し，$J_i=E_i/Z_i$
8) 節点電位行列(V_N)：図10に示すように節点電位を決めると $V_N=[V_{N1}, V_{N2}, V_{N3}]^T$ となる。

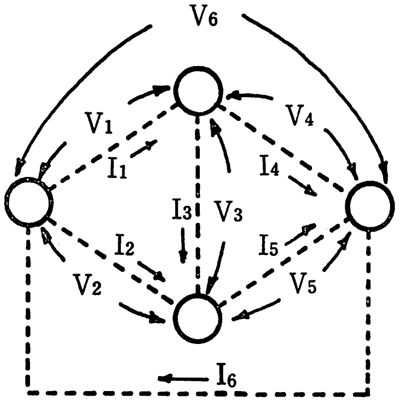

図 9

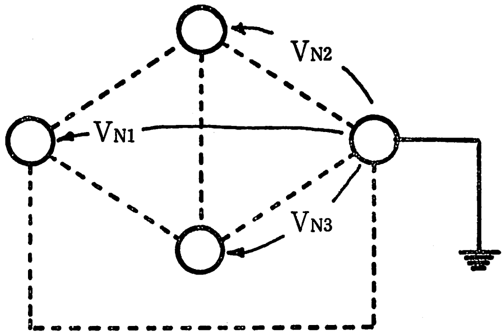

図 10

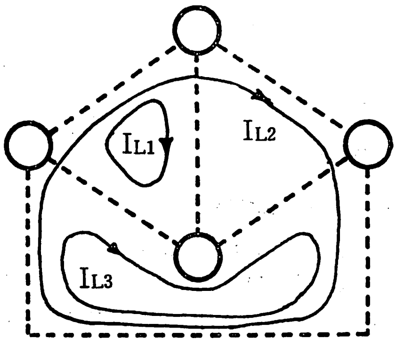

図 11

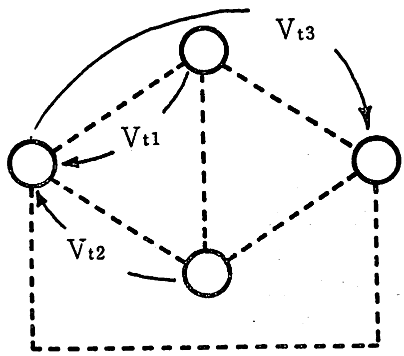

図 12

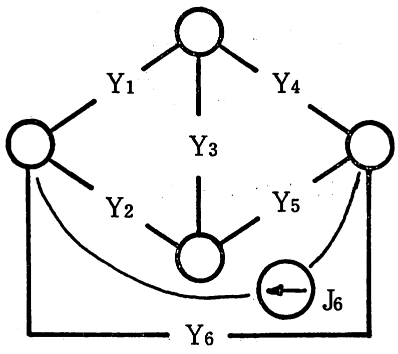

図 13

表 8

	1	2	3	4	5	6
1	Z_1	0	0	0	0	0
2	0	Z_2	0	0	0	0
3	0	0	Z_3	0	0	0
4	0	0	0	Z_4	0	0
5	0	0	0	0	Z_5	0
6	0	0	0	0	0	Z_6

表 9

	1	2	3	4	5	6
1	Y_1	0	0	0	0	0
2	0	Y_2	0	0	0	0
3	0	0	Y_3	0	0	0
4	0	0	0	Y_4	0	0
5	0	0	0	0	Y_5	0
6	0	0	0	0	0	Y_6

9) 閉路電流行列 (I_L)：図11に示すように閉路電流を決めると $I_L=[I_{L1},\ I_{L2},\ I_{L3}]_T$ となる。

10) 木の枝電圧行列 (V_t)：図12に示すように木の枝電圧を決めると $V_t=[V_{t1},\ V_{t2},\ V_{t3}]_T$ となる。

11) インピーダンス行列 (Z)： 対角要素にはその枝の自己インピーダンスが入り，他には相互インピーダンスが入る。これを表8に示す。（図1をもととする）

12) アドミタンス行列 (Y)： 対角要素には，その枝の自己アドミタンスが入り，他には相互アドミタンスが入る。これを表9に示す。(図13をもととする)

以上はすべて図1をもととしての1例を上げたが，一般にはそれぞれの行列の大きさは，枝数をm，節点数をnとすると

1）$A(n', m)$　3）$C(n', m)$　5）$I(m, 1)$
2）$B(m', m)$　4）$V(m, 1)$　6）$J(m, 1)$
7）$E(m, 1)$　9）$I_L(m', 1)$　11）$Z(m, m)$
8）$V_N(n', 1)$　10）$V_t(n', 1)$　12）$Y(m, m)$

但し $n'=n-1$，$m'=(m-(n-1))$

4—3　接点解析法

KCLにより，(4-3-1) 式が成り立つ。

$$A\cdot I=0 \tag{4-3-1}$$

またオームの法則より (4-3-2) 式が成り立つ。

$$I=Y\cdot V \tag{4-3-2}$$

また図9，図10より (4-3-3)′ 式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\\ V_5\\ V_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} V_{N1}\\ V_{N2}\\ V_{N3} \end{pmatrix}\Rightarrow V=A^T\cdot V_N \tag{4-3-3)'}$$

また一般に (4-3-3) 式も成り立つ。

$$V=A^T\cdot V_N \tag{4-3-3}$$

以上3式より (4-3·4) 式が求められる。

$$A\cdot Y\cdot A^T\cdot V_N=0 \tag{4-3-4}$$

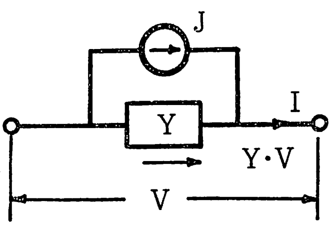

図　14

次に電流源を導入する。図15のように考えた場合，アドミタンスYには，Y・Vの電流が流れ，それに並列に電流源Jが入るので，枝電流Iは，(4-3-5) 式のようになる。

$$I=Y\cdot V+J \tag{4-3-5}$$

(4-3-4) 式に代入すると次式になる。

$$A\cdot Y\cdot A^T\cdot V_N=-A\cdot J$$

この式よりV_Nが求まり，(4-3-2)，(4-3-3) 式から，I，Vが求まる。

しかし，節点解析法には，次のような欠点がある。

(1)　例題では枝6の抵抗があるため，電圧源から電流源への等価変換ができたが，抵抗がなければ，計算が不可能となる。

(2)　節点間を短絡したときの電流を算出できない。

4—4　閉路解析法

KVLにより (4-4-1) 式が成り立つ。

$$B\cdot V=0 \tag{4-4-1}$$

オームの法則より (4-4-2) 式が成り立つ。

$$V=Z\cdot I$$

また図9，図11より次の式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4\\ I_5\\ I_6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I_{L1}\\ I_{L2}\\ I_{L3} \end{pmatrix}\Rightarrow I=B^T\cdot I_L$$

一般的に (4-4-3) 式が成り立つ。

$$I=B^T\cdot I_L \tag{4-4-3}$$

(4-4-4) 式が上記3式より求められる。

$$B\cdot Z\cdot B^T\cdot I_L=0 \tag{4-4-4}$$

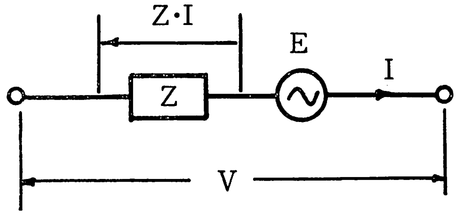

図　15

次に電圧源を導入する。図15のように考えると，インピーダンスZで，Z・Iの電圧降下が生じ，それに直列に電圧源Eが入る。枝電圧とはつまり電圧降下であり，その方向は図14に示すようになる。よって枝電圧Vは(4-4-5) 式に示される。

$$V=Z\cdot I-E \tag{4-4-5}$$

上式を (4-4-4) 式に代入し，(4-4-6) 式が得られる。

$$B\cdot Z\cdot B_T\cdot I_L=0 \tag{4-4-6}$$

この式からI_Lが求められることにより，(4-4-2)，(4-4-3) 式より，I，Vが求まる。

4—5　カットセット解析法

これは，解析の基本的変数が，木の枝電圧であるだけで，解析法は，節点解析法と同様であるため，使用する式だけを述べる。

$$C\cdot I=0$$
$$I=Y\cdot V$$
$$V=C^T\cdot V_t$$
$$C\cdot Y\cdot C^T\cdot V_t=0$$
$$C\cdot Y\cdot C^T\cdot V_t=-C\cdot J$$

5. あとがき

トポロジー理論の中の1つであるグラフ理論を応用して，電気，電子回路網を解くことを試みた。

その結果と，従来のキルホッフの法則等による手計算で求めた解を比較した結果，値が等しく満足する結果が得られた。

本稿では，回路網のグラフ化と，数値解析法を述べたが，2報では，それらの解析ブロックチャート，及び解析結果（計算機による結果）を報告する。

6. 参考文献

1） 小野寺力男　グラフ理論の基礎　森北出版

2） R.G.バッカーサー　T.L.サーティ　矢野健太郎　伊理正夫　グラフ理論とネットワーク基礎と応用　培風館

3） R.ヘルツマン　渡辺　茂　グラフとアルゴリズム　共立出版