部分空どう水中翼の基礎式とその解法

伊　藤　　惇

Partially Cavitating Submerged Hydrofoil

Jun Ito

（昭和51年10月29日受理）

1. 緒　　言

ポンプ，水車および船用プロペラなどの高速化が広まるにつれ，空どうを伴う流れの問題はますます重要性を増してきている。これらのうちで超空どうに関するものは，研究成果も豊富で明らかになっている部分も多いが，空どう発生のない状態から超空どう状態までの中間領域を占める，いわゆる部分空どうの問題は，その重要性にもかかわらず未解決の部分が多い。

この種の既存研究には，平板翼を対象とした，Geurst[1]，Acosta[2]，反りの影響を検討したGeurstら[3]，欠円翼について実験値との一致を目的としたWadeによる修正理論[4]また空どう後端の流れ模型を検討した西山ら[5]によるものなどがある。しかしながら，これらはいずれも無限流体中のもので，水面の影響が考慮されていない。

このような背景により，本論は文献[6]の手法を自由境界のある問題に拡張し，水面からの深さが翼特性にどのような影響を与えるかを明らかにしようとしたものである。

解法の手順は(1)「鏡像の理」を用いて水面の影響を考慮しながら，翼型と空どうにより生ずるじょう乱の速度場を求め(2)接線流れの条件と空どう部分の圧力一定条件より連立の積分方程式を誘導し(3)流れ場の線形化による特異性と収束性を考慮した級数表示を示し(4)空どう後端模型を導入し，適当な標点位置をとることにより連立代数方程式に帰着させる。

2. 基礎式

2.1 じょう乱速度

水面上にx軸，これに垂直にy軸をとり，没水深さfなる位置に弦長cなる水中翼がx軸の負の方向に速度Vで流れている一様流に迎角αで配置されているものとする。流れは翼型前縁よりはく離し，翼背面上の任意の点まで空どう（長さℓ）が形成されているものとする。翼型前縁より空どう後端までと，空どう後端より翼型後縁までの翼型上下面の速度の不連続量を渦分布$\gamma_1(x)$，$\gamma_2(x)$，空どうの厚み，翼厚を吹き出し分布$m_c(x)$，$m_0(x)$で表わすものとする。線形理論の仮定より，これらの特異点分布を$y=-f$上に分布させる。

水中翼に空どうを伴う流れは，流速が非常に大きいから，慣性力は重力に比べ圧倒的に大きい。したがって重力波動は無視して取扱うことができ，水面は水平であると考えることができる。また自由表面では大気圧で圧力一定であるからx軸方向速度のじょう乱部分は零である。よって自由表面で鏡像をとるとき，自由表面上でじょう乱速度のx成分が零となるように$y=f$に，$\gamma_1(x)$，$\gamma_2(x)$に対しては強さと方向の等しい渦を，また，$m_c(x)$，$m_0(x)$に対しては強さが等しく反対方向の吹き出しを鏡像としてとればよい。

以上のことから，渦によるじょう乱の速度ポテンシャルϕ_gは次のようになる。

$$\phi_g(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\ell}\gamma_1(\xi)+\int_{\ell}^{c}\gamma_2(\xi)\right\}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{y+f}{x-\xi}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{y-f}{x-\xi}\right)\right\}d\xi \tag{1}$$

吹き出し分布によるものは，

$$\phi_m(x,y)=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_0^{\ell}m_c(\xi)+\int_0^{c}m_0(\xi)\right\}\left[\log\left\{(x-\xi)^2+(y+f)^2\right\}+\log\left\{(x-\xi)^2+(y-f)^2\right\}\right]d\xi \tag{2}$$

したがって部分空どう水中翼によるじょう乱速度ポテンシャル$\phi(x,y)$は

$$\phi(x,y)=\phi_g(x,y)+\phi_m(x,y) \tag{3}$$

となり，x,yで偏微分し，極限移行すると，x,y方向のじょう乱速度u，vが求まり次のようになる。

$$u_1(x,-f\pm0)=\pm\frac{1}{2}\gamma_1(x)+u_0(x) \tag{4}$$

$$v_1(x,-f\pm0)=\pm\frac{1}{2}\{m_c(x)+m_0(x)\}+v_0(x) \tag{5}$$

$$u_2(x,-f\pm0)=\pm\frac{1}{2}\gamma_2(x)+u_0(x) \tag{6}$$

$$v_2(x,-f\pm0)=\pm\frac{1}{2}m_0(x)+v_0(x) \tag{7}$$

ここでサフィックス1，2は$0<x<\ell$，$\ell<x<c$の変域に対応させるものとする。また$u_0(x)$，$v_0(x)$は

$$u_0(x)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\ell}\gamma_1(\xi)+\int_{\ell}^{c}\gamma_2(x)\right\}\frac{-2f}{(x-\xi)^2+4f^2}d\xi+\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\ell}m_c(\xi)+\int_0^{c}m_0(\xi)\right\}\frac{d\xi}{x-\xi}-\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\ell}m_c(\xi)+\int_0^{c}m_0(\xi)\right\}\frac{(x-\xi)}{(x-\xi)^2+4f^2}d\xi \quad (8)$$

$$v_0(x)=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\ell}\gamma_1(\xi)+\int_{\ell}^{c}\gamma_2(\xi)\right\}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+4f^2}d\xi-\frac{1}{2\pi}\times\left\{\int_0^{\ell}\gamma_1(\xi)+\int_{\ell}^{c}\gamma_2(\xi)\right\}\frac{d\xi}{x-\xi}-\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\ell}m_c(\xi)+\int_0^{c}m_0(\xi)\right\}\frac{-2f}{(x-\xi)^2+4f^2}d\xi \quad (9)$$

2．2 積分方程式

空どう圧力を P_c，無限上流の圧力と速度を P_∞，V とするとき，空どう部分の圧力一定条件は，ベルヌーイの定理を線形化して次のようになる。

$$\sigma=\frac{2u_1(x,-f+0)}{V};\sigma=\frac{P_\infty-P_c}{\frac{1}{2}\rho V^2},(0<x<\ell,y=-f+0) \quad (10)$$

流れが翼面に沿う，いわゆる接線流れの境界条件は

$$\frac{dy_\ell}{dx}-\alpha=\frac{v_1(x,-f+0)}{V},(0<x<\ell,y=-f-0) \quad (11)$$

$$\frac{dy_s}{dx}-\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{v_2(x,-f+0)}{V}+\frac{v_2(x,-f-0)}{V}\right),(\ell<x<c) \quad (12)$$

また翼厚分布と吹き出し分布の関係は

$$\frac{dy_0(x)}{dx}=\frac{m_0(x)}{V} \quad (13)$$

ここでσはキャビテーション係数，y_ℓ, y_sは翼下面と反り線の座標，y_0 は翼厚である。(4)，(5)，(6)，(7)式を(10)，(11)，(12)式に代入し，(13)式も考慮すると，$\gamma_1(x)$，$\gamma_2(x)$，$m_c(x)$を未知関数とする連立の積分方程式が得られ，これが部分空どう水中翼の流れ場を支配する基礎方程式となる。

3 解 法

3．1 級数表示

翼型前縁および空どう後端の特異性は

$$\lim_{x\to+0} u(x,-f-0)\sim x^{-\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to+0} x(v,-f-0)\sim x^{-\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to\ell+0} u(x,-f+0)\sim \begin{cases}(x-\ell)^{-\frac{1}{2}} & \text{(閉鎖・半閉鎖形模型)}\\ \frac{1}{10} & \text{(開放形模型)}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\ell-0} v(x,-f+0)\sim \begin{cases}(\ell-x)^{-\frac{1}{2}} & \text{(閉鎖・半閉鎖形模型)}\\ \frac{1}{10} & \text{(開放形模型)}\end{cases}$$

以上の特異性と級数の収束性を考慮して，未知関数$\gamma_1(x)$ $\gamma_2(x)$, $m_c(x)$を次のように展開する。

$$\gamma_1(x)=V\left(a_{-1}+a_0\sqrt{\frac{1-\sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)}}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\phi\right),\quad x=\frac{\ell}{2}(1-\cos\phi) \quad (14)$$

$$\gamma_2(x)=V\left(b_{-1}\frac{1+\cos\epsilon}{2}+\lambda b_0\cot\frac{\epsilon}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin m\epsilon\right),\quad x=\frac{c-\ell}{2}(1-\cos\epsilon)+\ell \quad (15)$$

$$m_c(x)=V\left(C_{-1}\sqrt{\frac{1-\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}+\lambda C_0\cot\frac{\theta}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}C_p\sin p\theta\right),\quad x=\frac{\ell}{2}(1+\cos\theta) \quad (16)$$

ここでλは，空どう後端の流れ模型が，閉鎖形・半閉鎖形模型では 1，開放形模型では 0 なる値をとるものとする。翼厚勾配は

$$\frac{dy_0}{dx}=d_0+\sum_{q=1}^{\infty}d_q\cos q\Omega,\quad x=\frac{c}{2}(1+\cos\Omega) \quad (17)$$

と展開できるが，$d_0, d_1, d_2,\cdots\cdots$は(17)式を積分して得られる次式

$$y_0=d_0\frac{c}{2}(1+\cos\Omega)-d_1\frac{c}{8}\left\{\cos(2\Omega)-1\right\}+\sum_{q=2}^{\infty}d_q\frac{c}{4}\left[\frac{\cos(q+1)\Omega\}}{q+1}-\frac{\cos\{(q-1)\Omega\}}{q-1}+\frac{2(-1)^{q+1}}{1-q^2}\right] \quad (18)$$

に適当な標点位置を与え，連立の代数方程式を誘導し，これから定めておけばよい。

3．2 連立一次方程式

積分方程式に上記級数を代入し，種々の有限ヒルベルト変換を行なうと，自由流線上では

$$-d_0\left\{\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1+\cos\Omega}{1-\cos\Omega}\right)+2J(t,d_0)\right\}+\sum_1^{q}d_q\left\{\frac{F(q,\cos\Omega)}{\pi}+2J(t,d_q)\right\}=-\sigma+a_{-1}\left\{1+2J(s,a_{m1})\right\}+a_0\left\{\sqrt{\frac{1-\sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)}}+2J(s,a_0)\right\}+\sum_1^{n}a_n\left\{\sin n\phi+2J(s,a_n)\right\}+b_{-1}\left\{2J(s,b_{m1})\right\}+\lambda b_0\left\{2J(s,b_0)\right\}+\sum_1^{m}b_m\left\{2J(s,b_m)\right\}+C_{-1}\left\{(2-\sqrt{\frac{\cos(\theta/2)-1}{\cos(\theta/2)}}-2J(t,c_{m1})\right\}-c_0\lambda\left\{1+2J(t,C_0)\right\}+\sum_1^{p}C_p\left\{\cos p\theta-2J(t,C_p)\right\} \quad (19)$$

ここに$F(q,\cos\Omega)$は

$$F(q,\cos\Omega)=\sum_{r=0}^{[q/2]}\frac{(-1)^r q}{2(q-r)}\binom{q-r}{r}\frac{2^{q-2r}}{(-1)^{q-2r+1}}\Big[\sum_{s=0}^{q-2r-1}\frac{(-\cos\Omega)^s}{q-2r-s}\Big\{(-1)^{q-2r-s}-1\Big\}+(-\cos\Omega)^{q-2r}\log\Big(\frac{1-\cos\Omega}{1+\cos\Omega}\Big)\Big] \quad (20)$$

ただし，$[q/2]$ における〔　〕はガウスの記号，$\binom{q-r}{r}$ は二項係数とする。同様に接線流れの条件は $y_s'=y_s-\alpha$ とすると，

$$\frac{dy_s'}{dx}+\sum_1^q d_q J(s,d_q)=-a_{-1}\Big\{\frac{1}{2\pi}\log\Big(\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}\Big)+J(t,a_{m1})-a_0\Big\{1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)}}+J(t,a_0)\Big\}+\sum_1^n a_n\Big\{\frac{1}{2}\cos n\phi-J(t,a_n)\Big\}-b_{-1}\Big[\frac{1}{2\pi}\Big\{1+\log\Big(\sqrt{\frac{\rho+1}{\rho-1}}\Big)^{\rho-1}\Big\}+J(t,b_{m1})\Big]-\lambda b_0\Big\{\frac{1}{2}\Big(1-\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho+1}}\Big)+J(t,b_0)\Big\}+\sum_1^m b_m\Big\{\frac{1}{2}(-\sqrt{\rho^2-1}-\rho)^m-J(t,b_m)\Big\}-C_{-1}\times\Big\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\cos(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}}+J(s,(m))\Big\}-\lambda C_0\Big\{\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}+J(s,C_0)\Big\}-\sum_1^P Cp\Big\{\frac{1}{2}\sin p\theta+J(s,Cp)\Big\},\ \rho=\frac{2x-c-\ell}{c-\ell} \quad (21)$$

$$\frac{dy_s'}{dx}+\sum_1^g d_g J(s,d_g)=-a_{-1}\Big\{\frac{1}{2\pi}\log\Big(\frac{\nu+1}{\nu-1}\Big)+J(t,a_{m1})\Big\}-a_0\Big\{\frac{1}{2}\Big(2-\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}}-\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{1+\nu}}}\Big)+J(t,a_0)\Big\}+\sum_1^\infty a_n\times\Big\{\frac{1}{2}(\sqrt{\nu^2-1}-\nu)^n-J(t,a_n)\Big\}-b_{-1}\Big[\frac{1}{2\pi}\Big\{1+\log\Big(\frac{1+\cos\in}{1-\cos\in}\Big)^{1+\cos\in}\Big\}+J(t,b_{m1})\Big]+\lambda b_0\Big\{1-J(t,b_0)\Big\}-\sum_1^m b_m\Big\{\cos m\in+J(t,b_{m1})\Big\}-C_{-1}J(s,c_{m1})-\lambda c_0 J(s,c_0)-\sum_{p=1}^{p} CpJ(s,Cp),\ \nu=\frac{2x-\ell}{\ell} \quad (22)$$

3. 3　空どう後端の流れ模型

空どう後端においては，流れが不安定でかつ複雑な挙動を示す。したがってこれを数学的に取扱うには，空どう後端に流れ模型を設定して解かなければならない。空どう後端の開き幅を δ とすると

閉鎖形模型；

$$\int_0^\ell\frac{m_2(x)}{V}dx=0,\ \frac{C_{-1}}{2}+C_0+\frac{C_1}{2}=0 \quad (23)$$

半閉鎖形模型；

$$\int_0^\ell\frac{m_2(x)}{V}dx=\delta,\ \frac{C_{-1}}{2}+C_0+\frac{C_1}{2}=\frac{2\delta}{\pi\ell} \quad (24)$$

開放形模型；

$$\gamma_1(\ell)=\gamma_2(\ell),\ a_{-1}=b_{-1} \quad (25)$$

(19)，(21)，(22)と，流れ模型に応じて(23)，(24)，(25)のいずれかを選択し，連立させて解くことにより，級数の係数とキャビテーション係数を未定係数とする連立一次の代数方程式に帰着される。

4.　計算方法

式(19)，(21)，(22)に含まれる変数 $\phi,\in,\rho,\nu,\Omega$ に境界条件を満足させる標点位置を代入することにより，連立方程式が成立し，解が得られるが，標点の座標は次のとうりである。

$$(19)式;\ x_i=\frac{\ell}{2}\Big[1-\cos\Big\{\frac{\pi}{2L}(2i-1)\Big\}\Big],\ (i=1,2,\cdots L) \quad (26)$$

$$(21)式;\ x_i=\frac{\ell}{2}\Big[1-\cos\Big\{\frac{\pi}{2M}(2i-1)\Big\}\Big],\ (i=1,2,\cdots M) \quad (27)$$

$$(22)式;\ x_i=\frac{c-\ell}{2}\Big[1-\cos\Big\{\pi-\frac{\pi}{2N}(2i-1)\Big\}\Big]+\ell\ (i=1,2,\cdots N) \quad (28)$$

また標点数 L，M，N については，渦分布の級数の正弦部分の２項，吹き出し分布については同じく３項までとる Schlichting の方法と合わせることにより標点の総数を定め，各境界に対する振り分けは試行錯誤により最も精度の良いものを選んだ。したがって閉鎖・半閉鎖形模型では $L=6, M=3, N=4$，開放形模型では $L=8, M=3, N=3$，とした。

なお式(19)，(21)，(22)に含まれる記号 $J(s,d_0)$ などは，d_0 にかかる関数に次式の s（あるいは t）を掛け数値積分することを意味している。

$$s=\frac{-2f}{(x-\xi)^2+4f^2},\ t=\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+4f^2}$$

5.　結　言

部分空どう翼が，水面から有限深さで作動する場合の基礎方程式とその解法を呈示した。具体的な計算結果と特性解析法については割愛したが，妥当な結果がすでに得られ日本機械学会東北学生会で昭和51年卒業生の佐々木久郎君により発表されている[7]。有限ヒルベルト変換を主とした数学的取扱いについて昭和50年卒業生の遠藤正彦君によるところが多い。

6.　文　献

(1) Geurst, J. A., ISP-Vol.6, No.60(1959)
(2) Acosta, A. J., ONR, Rep. No. E-19.9(1955)
(3) Geurst, J. A. and Verbrugh, P. J., ISP-Vol.6, No.61 (1959)
(4) Wade, R. B., Journal of Ship Research, 1965
(5) 西山他, Trans of ASME, D, 1971
(6) 西山他，機構論，No. 740-6（'74-4），No. 750-17（'75-10）
(7) 佐々木他，日本機械学会東北学生会，第6回，昭和51年3月