

# 幾つかの統計モデルによるシミュレーション について

長谷部 正彦

Simulation by some stochastic models

Masahiko HASEBE

(昭和50年10月31日受理)

## 1. ま え が き

この研究は、過去の水文資料の時系列（河川流量、日降水量）をいろいろな手法で現状解析して、その特性を見出し、その特性から予測値を使って水文資料を補充することを目的としている。現在、水文学は急速に発達しつつあるが、いまだに論理体系が完成されていない学問である。そのため、どうしても確率論的な手法で解析しなければならない。本論文では日降水時系列の Simulation 及び流量時系列の相関分析を行なった。

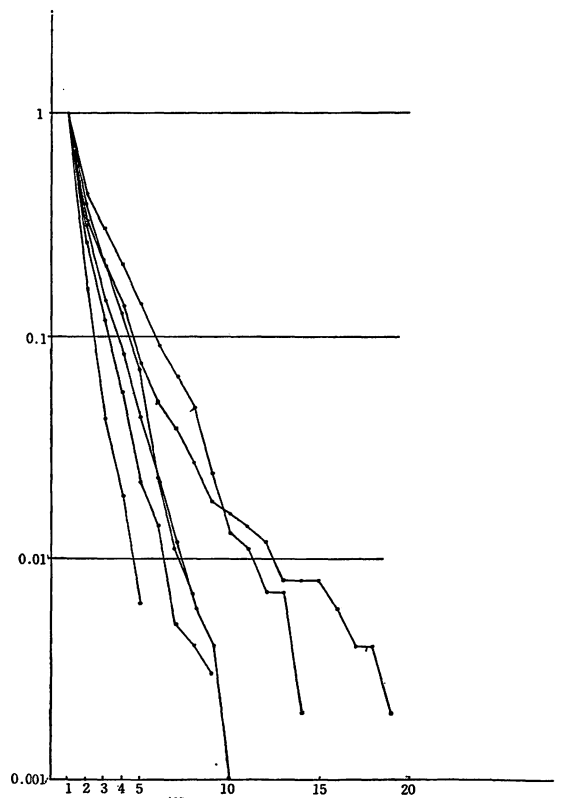
簡単に概要をかくと前者は、日降水量及び降水間隔日数の超過確率を求め、これによって降水モデルを作る。このモデルを用いて、モンテカルロ法で降水間隔日数、降水量を模擬発生させる。data は秋田市の日降水系列（1924～1973）を使用した。後者は Matalas の提案した、多地点マルコフ連鎖モデルと、星、山岡により提案されたモデルを用いて、流量の Simulation を行なった。data は雄物川水系（樺川地点）、最上川水系（高屋地点）、北上川水系（登米地点）、阿武隈川水系（岩沼地点）で観測された月平均流量を用いた。観測期間は1959～1972である。

## 2. 日降水時系列の Simulation

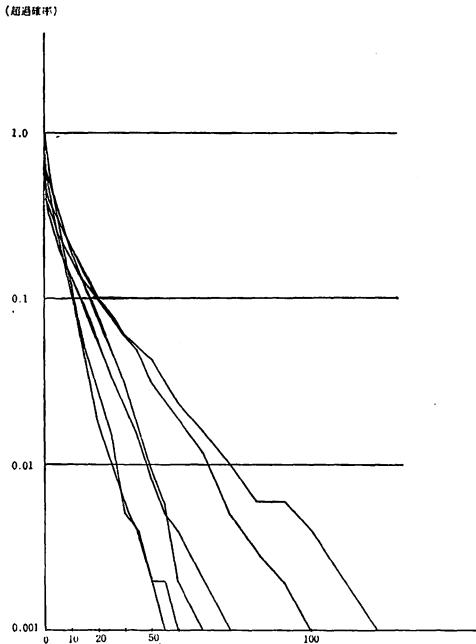
一般に自然現象は一定の物理法則に従っている。その物理法則を定式化することが出来れば、その式を解析的或いは数値的に解くことに帰着する。しかしながら、たとえ現象を定式化したとしても、それは平均的 scale で現象を見てのことであることが多い。又定式化が困難であり、不十分な現象もある。後者は、特に確率論的な問題についていえることである。この様なケースには、現象を直接数値的に模擬発生をして問題を解明する方法が有効であると考えられる。本論文では、この様な理由で日降

水量の解析を試みた。

過去の標本を用いて各月毎に日降水量および降水間隔日数の超過確率を求める。図1、図2に代表的な2、3の例を示している。図からある直線で近似可能と思われる。一般には日降水量、降水間隔日数の確率分布は指数分布に従うとされている。故に超過確率 ( $\log Pr$ ) と変量とを直線で近似した。表1、表2に各々の分布曲線を示す。a, b は勾配と切片である。以上直線が決定され



図一 1 降水間隔日数超過確率



図一 2 日降水量超過確率

るとモンテカルロ法で日降水量，降水間隔日数を決定して時系列モデルを模擬発生（40年間）させた。図3は日降水平均及び降水日確率について実測のそれと比較したものである。ここで少しずれている月もあるが，これは標本の分散が大きいことによるものと思われる。

3. 相 関 分 析

Matalas は水文学の模擬発生方法として下記の様な多地点マルコフ連鎖モデルを提案した。

$$Z_k = AZ_{k-1} + BE_k \quad \text{①}$$

$$Z_k = [n \times N], \quad A = [n \times n], \quad B = [n \times n], \quad E_k = [n \times N]$$

n : 観測所数

N : 月標本数

$E_k$  : 標準正規乱数行列

$$A = [Z_k Z_k^T / N] [Z_{k-1} Z_{k-1}^T / N]^{-1} \quad \text{②}$$

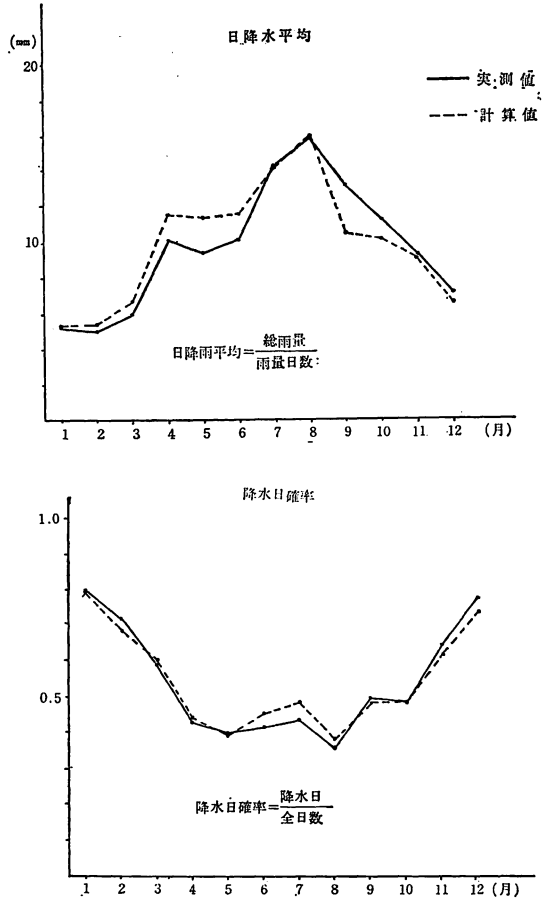
$$BB^T = [Z_k Z_k^T / N] - A [Z_{k-1} Z_{k-1}^T / N] \quad \text{③}$$

行列Bの要素は③式の右辺（対称行列）の規準化された固有値ベクトルである。

星，山岡による方法は，時系列の構造が1次Markov過程をなすと考えられる時  $\log - 1$  と  $\log - 0$  の相関係数行列を入力とするモデル式を提案した。採用モデルは

$$g_i = W_i Z_k \quad \text{④}$$

$g_i \dots [1 \times N]$  の合成変量



図一 3

$$W_i \dots [1 \times n]$$

の重みベクトル又相関係数 ( $a_i$ 構造ベクトル) が最も高い値を示す様な重みベクトルを求める。重みベクトルを出すための条件式は次の通りである。

$$W_i R W_i^T = 1 \quad \text{⑤}$$

$$W_i R W_j^T = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{⑥}$$

$$V_i = a_i a_i^T \quad \text{⑦}$$

ここで

$$a_i = W_i R_i \quad \text{⑧}$$

$$R = Z_k Z_k^T / N \quad \text{⑨}$$

$$R_i = Z_k Z_{k-1}^T / N \quad \text{⑩}$$

以上⑤式から⑩式までの条件式から下記の式が求まる。

$$(R_i^T R_i - \lambda_i I) a_i^T = 0 \quad \text{⑪}$$

$$W_i = a_i R_i^T R_i^{-1} / \lambda_i \quad \text{⑫}$$

表 1 日降水量分布曲線へのあてはめ

月	$y_1 = \log_{10} Pr$ の範囲	a	b
1月	$2.00 \geq y_1 > 0.26$	-0.09	2.00
	$0.26 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.04	1.11
2月	$2.00 \geq y_1 > 0.53$	-0.09	1.85
	$0.53 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.05	1.40
3月	$2.00 \geq y_1 > 1.77$	-0.46	2.00
	$1.77 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.07	1.81
4月	$2.00 \geq y_1 > 1.63$	-0.74	2.00
	$1.63 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.04	1.65
5月	$2.00 \geq y_1 > 1.60$	-0.80	2.00
	$1.60 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.04	1.61
6月	$2.00 \geq y_1 > 1.63$	-0.74	2.00
	$1.63 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.04	1.61
7月	$2.00 \geq y_1 > 1.65$	-0.70	2.00
	$1.65 \geq y_1 > 1.15$	-0.04	1.64
	$1.15 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.02	1.42
8月	$2.00 \geq y_1 > 1.44$	-1.12	2.00
	$1.44 \geq y_1 > 0.48$	-0.03	1.45
	$0.48 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.02	1.22
9月	$2.00 \geq y_1 > 1.61$	-0.48	2.00
	$1.61 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.03	1.63
10月	$2.00 \geq y_1 > 1.69$	-0.62	2.00
	$1.69 \geq y_1 > 0.54$	-0.06	1.70
	$0.54 \geq y_1 > 0.49$	-0.02	0.85
	$0.49 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.03	1.62
11月	$2.00 \geq y_1 > 1.81$	-0.38	2.00
	$1.81 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.05	1.85
12月	$2.00 \geq y_1 > 0.34$	-0.07	2.00
	$0.34 \geq y_1 \geq 0.00$	-0.04	1.28

表 2 降水間隔日数分布曲線へのあてはめ

月	$y_2 = \log_{10} Pr$ の範囲	a	b	
1月	$2.00 \geq y_2 > 1.21$			$x_2=1$
	$1.21 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.48	2.19	
2月	$2.00 \geq y_2 > 1.35$			$x_2=1$
	$1.35 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.38	2.11	
3月	$2.00 \geq y_2 > 1.51$			$x_2=1$
	$1.51 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.28	2.04	
4月	$2.00 \geq y_2 > 1.65$			$x_2=1$
	$1.65 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.21	2.08	
5月	$2.00 \geq y_2 > 1.63$			$x_2=1$
	$1.63 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.18	2.00	
6月	$2.00 \geq y_2 > 1.60$			$x_2=1$
	$1.60 \geq y_2 > 0.18$	-0.18	1.95	
	$0.18 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.03	0.52	
7月	$2.00 \geq y_2 > 1.52$			$x_2=1$
	$1.52 \geq y_2 > 0.26$	-0.21	1.88	
	$0.26 \geq y_2 \geq 0.00$	-0.06	0.79	
8月	$2.00 \geq y_2 > 1.59$			$x_2=1$
	$1.59 \geq y_2 > 0.83$	-0.13	1.89	
	$0.83 \geq y_2 > 0.00$	-0.08	1.36	
9月	$2.00 \geq y_2 > 1.59$			$x_2=1$
	$1.59 \geq y_2 > 0.00$	-0.29	2.19	
10月	$2.00 \geq y_2 > 1.57$			$x_2=1$
	$1.57 \geq y_2 > 0.00$	-0.20	1.97	
11月	$2.00 \geq y_2 > 1.41$			$x_2=1$
	$1.41 \geq y_2 > 0.00$	-0.32	2.08	
12月	$2.00 \geq y_2 > 0.00$			$x_2=1$
	$1.27 \geq y_2 > 0.00$	-0.46	2.20	

表

9月  $\lambda_1 = 0.0065$   $\lambda_2 = 0.0537$   
 $\lambda_3 = 0.6088$   $\lambda_4 = 0.2525$

	雄物川	最上川	阿武隈川	北上川
ベ 構 ク 造 ト ル	0.0667	-0.0040	-0.1486	0.2545
	0.0004	0.2233	-0.2019	-0.0361
	-0.0183	0.0544	0.5385	0.3244
	-0.0395	-0.0300	-0.5059	0.2850
ベ 重 ク ミ ト ル	0.6511	-0.0545	0.9099	0.1021
	-1.0681	1.2718	0.6638	-0.4625
	0.3105	-1.0739	0.4096	-0.6445
	-0.0488	-0.9262	-0.6475	0.2579

3

10月  $\lambda_1 = 1.0531$   $\lambda_2 = 1.2675$   
 $\lambda_3 = 0.0878$   $\lambda_4 = 0.0037$

	雄物川	最上川	阿武隈川	北上川
ベ 構 ク 造 ト ル	0.8923	0.3095	0.1158	-0.0076
	-0.1162	0.8234	-0.1270	-0.0316
	-0.4907	0.4255	0.2348	-0.0011
	0.0508	0.5591	-0.0558	0.0517
ベ 重 ク ミ ト ル	1.2342	0.6622	-0.0256	-0.7482
	-0.4510	1.3657	-0.6458	-0.2890
	0.9551	0.1193	0.2749	0.9979
	-1.3786	-1.1935	1.2239	0.0568

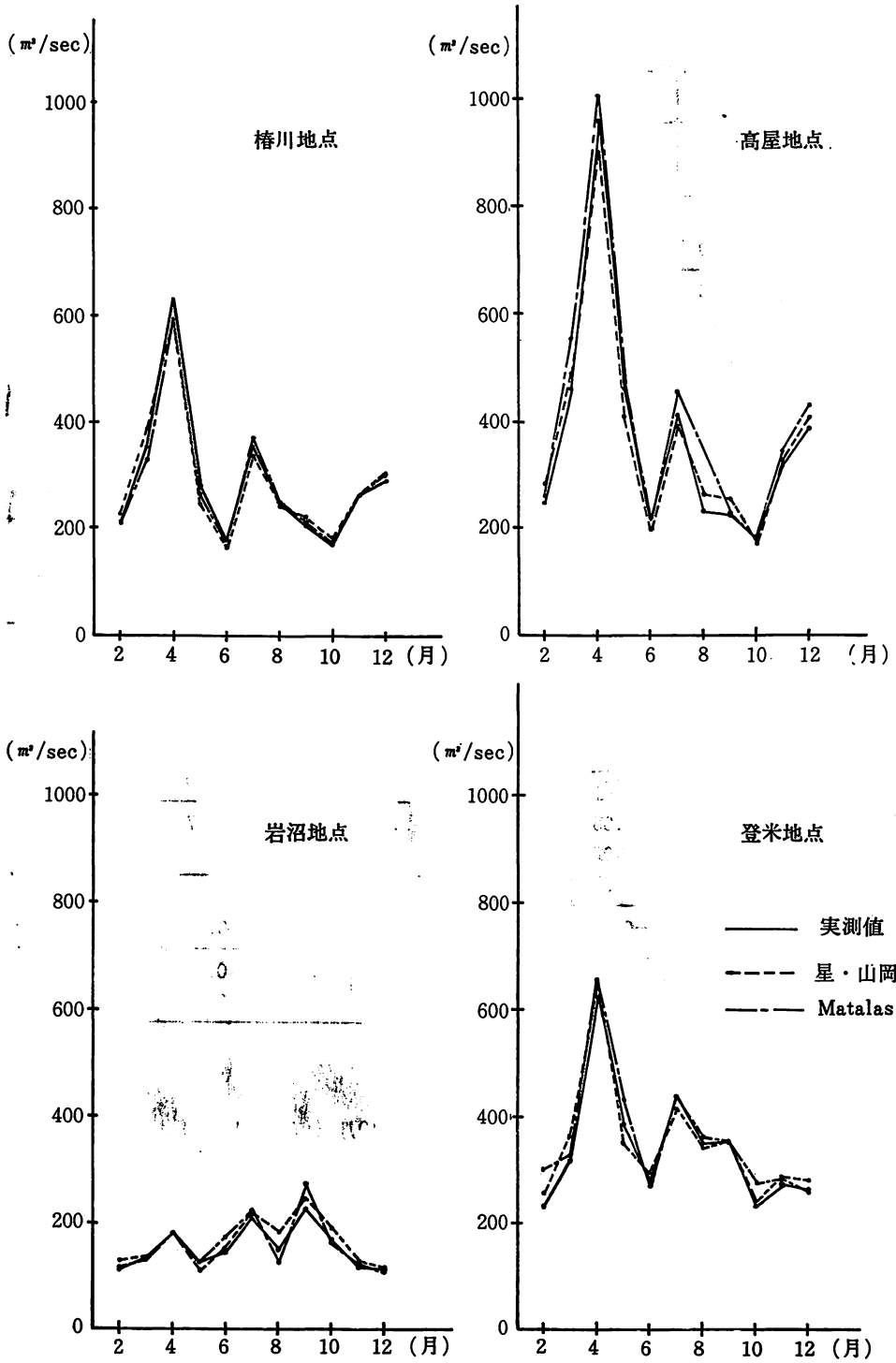


図 4

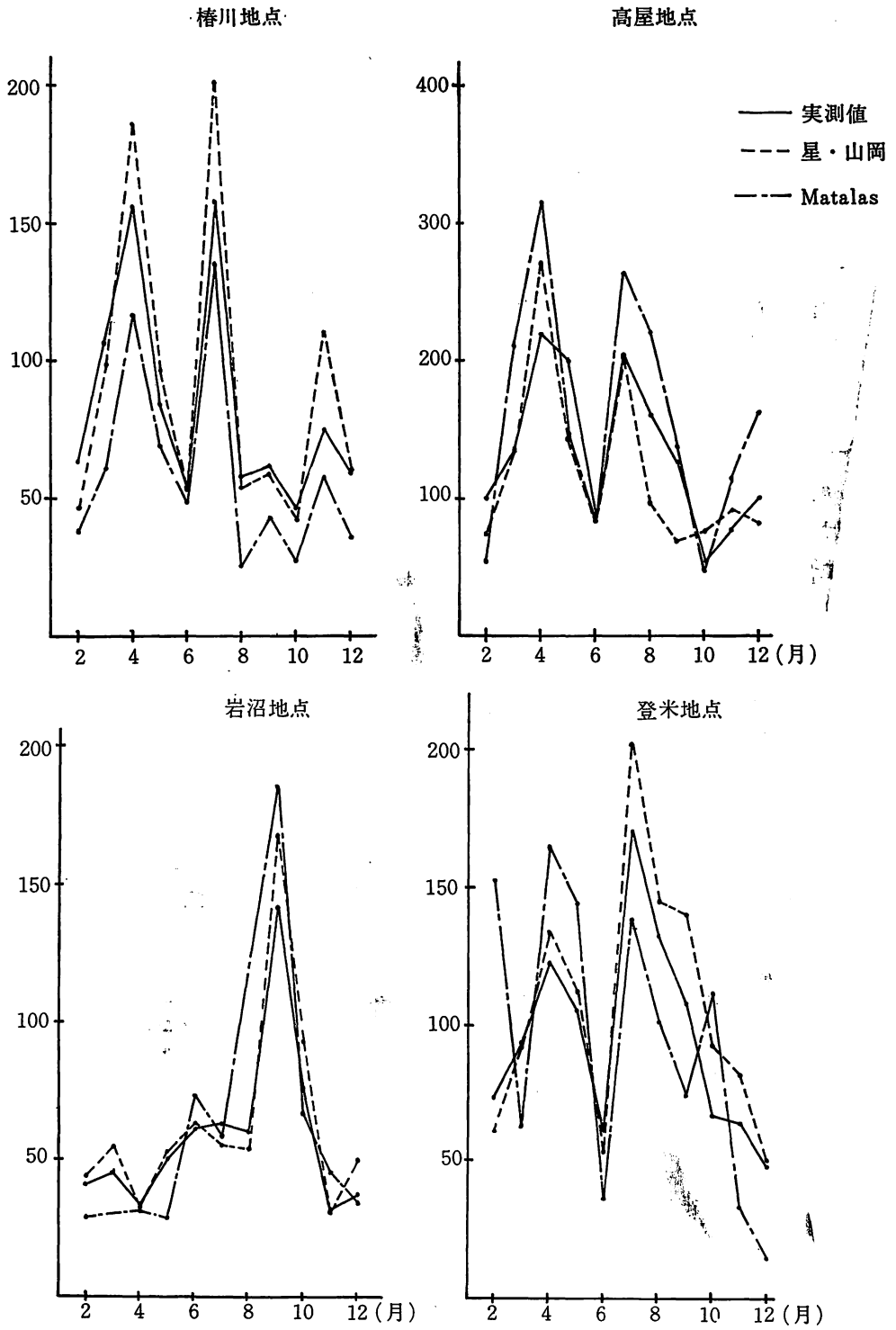


図 5

①式から導出される過程は次の通りである。

$$\textcircled{8} \text{式から } a_i^T = R_1^T W_i^T$$

$$\textcircled{5} \text{式から } W_i^T = [W_i R]^{-1}$$

$$\text{故に } a_i^T = R_1^T R^{-1} W_i^{-1} \quad \textcircled{13}$$

$$\textcircled{8} \text{式から } a_i^{-1} = R_1^{-1} W_i^{-1}$$

$$\text{故に } W_i^{-1} = R_1 a_i^{-1}$$

これを⑬式に代入して

$$a_i^T = R_1^T R^{-1} R_1 a_i^{-1} \quad \textcircled{14}$$

$$a_i a_i^T = V_i$$

$$a_i^T = a_i^{-1} V_i$$

これを⑭式に代入して

$$a_i^T = R_1^T R^{-1} R_1 a_i^T / V_i$$

この式を整理すると

$$R_1^T R^{-1} a_i^T - V_i a_i^T = 0$$

$$(R_1^T R^{-1} R_1 - V_i) a_i^T = 0$$

⑮式から  $V_i$  が固有値であり  $\lambda_i$  に置き換えることができる。以上の様にして重みベクトル ( $W$ ) が求まると月流量を同時に模擬発生させる式は

$$Z_k = W^{-1} E \quad \textcircled{16}$$

となる。Eは標準正規乱数行列である。

構造ベクトルと重みベクトルを表に示す。図4, 図5では4河川の平均値と標準偏差について、2つのモデルと実測値とを比較したものである。

#### 4. 結果の考察

以上述べてきた日雨量系列の Simulation, 相関分析の考察及び問題点をまとめると超過確率を用いた方法では解析方法が定量的解析方法のため、現象の解析, あるいは結果の評価が比較的簡単になる。現象全体が複雑なものを簡単にモデル化できて、データが多いと

有効であると思われる。相関分析を用いた方法では空間的に Simulate でき、単位時間が短いケースでも解析と同時にモデル式の逆変換によって簡単に任意の観測所間の、任意の長さの時系列を同時に Simulate することが可能である。本解析ではデータが少なかったため2つのモデルの間にはっきりしたちがいはみられなかった。

本解析では2種の Simulation を行なった。現状においては難しいことであるが、将来の Simulation においては、もう少し物理機構の考慮を検討していかなければいけないだろう。また Simulate したものはそれぞれ過去のデータと比較し、検討したものである。そのため Simulate したものを、そのまま将来の予測に使用できるか、ということは疑問である。しかしある程度の平均値的な予測は各手法とも有効であると思われるので、本文資料を補充させる目的は十分はたせられると思われる。予測の問題ではどうしても将来のデータが得られないのでどの手法を適用するか、決めることは困難である。予測の目的に応じて各手法をとらざるを得ないと思われる。

#### 謝 辞

本稿の計算の一部について石井新一君, 小野政毅君, 工藤栄吉君, 佐々木健一君, 藤原義也君の援助を得た。ここに記して謝意を表します。又資料を提供して頂いた建設省秋田工事事務所, 秋田地方気象台の関係諸氏に感謝致します。

#### 参 考 文 献

- 大地羊三監修, コンピュータによる土木工学演習
- 角屋睦, 京大防災研究所年報
- 星, 風間, 降水量の流域特性とシミュレーションについて 土木学会第26回年構
- 山岡, 星, 降水量時系列を考慮した多地点月流量シミュレーションについて
- 第19回水理講演会講演集