

# 制御系の感度設計

(副ループ極の変動に着目して)

柳原昌輝

The design of Control Systems with Sensitivity  
(In view of the pole variation of minor loop)

Masateru YANAGIWARA

(昭和50年10月31日受理)

## 1. ま え か き

従来の自動制御系の設計法は、Bode 線図、根軌跡、インディシャル応答等からの特性をもとにして、設計の3大要素である速応性、減衰特性、定常特性を、指定した仕様を満足するように制御要素を決定する設計法でありました。しかしながら、実際問題としては、入力の歪や変化、外乱等を考慮しなければならない。つまり系の安定性において問題がある訳である。

最近では、対象系の最適化制御を実現するために、色々研究が行なわれてきているが、対象系を数式によって完全に表現するには多くの困難がある。そこでそれを打開する一方法として系のパラメータ変動が系全体にどの程度の影響を与えるかという方向に視野が移された結果、パラメータ感度が重要視されてきた。パラメータ感度とは上に述べたように、対象系のあるパラメータ変動が系全体に与える変動の割合をいう。このパラメータ感度が小さい程、系は安定ということになる訳である。従って安定性に対する影響や負荷変動等によるパラメータ変動の影響が感度として考えられるようになった。

本研究は、パラメータ変動の比較的影響の大きい対象系の極をパラメータとし、代表根指定法を採用し、研究した。また、代表根が系の過渡応答をはじめ、諸特性に最も大きな影響を及ぼすということから、パラメータ感度としては、対象系の極の変動に対する代表根の変動の割合を用いた。

研究の目的は、系が最適感度を有するように、設計上実現可能な範囲においての補償回路を求めることにある。そのために対象系としては、サーボ系を取り扱った。また、感度を下げするためには、特に対象系に対する

並列補償に視点をおき、更に直列補償を施した上で感度解析をし、各伝達関数の定数と感度との関係を求め、系が最適感度となる諸定数を決定していくという方法をとった。また、出力応答は、デジタルシミュレーションすることによって求めた。

その結果、副ループ極の変動を円に抑えることにより、感度を1~2%以下において、実現可能な系を設計することができ、過渡応答におけるパラメータ変動の影響もほとんどないことがわかった。

## 2. 副ループの解析

### 2-1 副ループの重要性

まず副ループの極の変動の解析についてのべる。対象系を含む副ループ伝達関数を図2に示す。

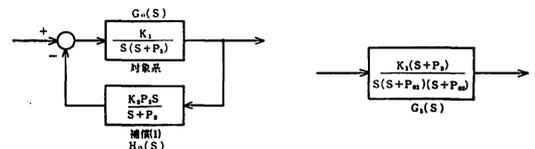


図2 副ループ伝達関数

この感度設計における副ループの必要性は、サーボ系の極  $P_1$  の変動を直接代表根に与えないように、一端副ループの極  $P_{01}$ 、 $P_{02}$  で変動を抑えるため、感度に関する補償としてこの副ループは重要である。従って副ループの極の変動をどう抑えるかが問題となる。

本研究においては、対象系の極のパラメータ変動に対して、副ループの極の変動が円の軌跡となるような並列

補償を考えた。(図3参照)

その理由として、1つには、対象系の極の変動によって副ループの極がランダムに変動した場合、代表根の変動状態がとらえにくいので、副ループの極の変動を円の軌跡とした。また、副ループの極の変動を円の軌跡とした場合、副ループの零点  $P_2$  に関し、図3からもわかるように、位相のみについて副ループの極の変動を考慮することができるからである。

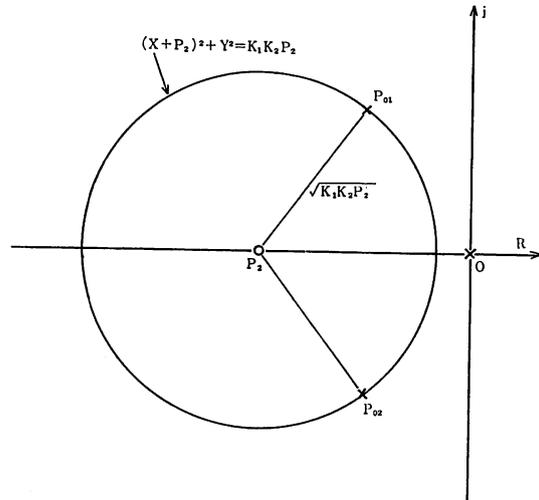


図3  $P_1$  変動による副ループ極の軌跡円

2-2 副ループ極の軌跡円

補償回路(直列, 並列)を加えた系全体のブロックダイアグラムを図1に表わす。ここにおいて、対象系に並

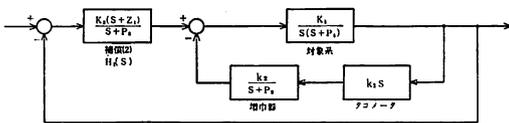


図1 主プールの伝達関数

列補償を加えた閉ループ部分を副ループと称し、この副ループについて考えてみる。

対象系(サーボ系)の伝達関数:  $G_0(S)$  を次のように表わす。

$$G_0(S) = \frac{K_1}{S(S+P_1)} \quad (2-1)$$

また、補償回路の伝達関数  $H_0(S)$  は、増巾器:  $\frac{k_2}{S+P_2}$ , タコメータ:  $k_1 S$  で構成し、次のように表わす。

$$H_0(S) = \frac{K_2 P_2 S}{S+P_2} \quad (2-2)$$

但し、 $K_1, K_2$  は各々の伝達関数のゲイン、 $-P_1, -P_2$

は極である。副ループの閉ループ伝達関数は次のようになる。

$$G_1(S) = \frac{G_0(S)}{1+G_0(S)H_0(S)} = \frac{K_1(S+P_2)}{S\{(S+P_1)(S+P_2)+K_1K_2P_2\}} \quad (2-3)$$

この式は次のように書き換えられ、これを図2に示す。

$$G_1(S) = \frac{K_1(S+P_2)}{S(S+P_{01})(S+P_{02})} \quad (2-4)$$

但し、 $-P_{01}, -P_{02}$  は、副ループの伝達関数の極である。

すなわち、サーボ系の極  $P_1$  の変動によるこの副ループの極  $-P_{01}, -P_{02}$  の変動を円に抑えようとするわけである。そこで(2-3)式=(2-4)式より  $P_{01}, P_{02}$  を求める。

$$P_{01} = \frac{P_1+P_2}{2} - j \frac{\sqrt{4K_1K_2P_2-(P_1-P_2)^2}}{2}$$

$$P_{02} = \overline{P_{01}} \quad (2-5)$$

但し、 $4K_1K_2P_2 > (P_1-P_2)^2$

次に、パラメータ  $P_1$  の変動による  $-P_{01}, -P_{02}$  の変動が円となることを証明する。

(2-5) 式から  $-P_{01}$  は次のようになる。

$$-P_{01} = -\frac{(P_1+P_2)}{2} + j \frac{\sqrt{4K_1K_2P_2-(P_1-P_2)^2}}{2} \quad (2-6)$$

(2-6) 式を次のようにおく。

$$-P_{01} = x + jy \quad (2-7)$$

(2-6), (2-7) 式から  $x, y$  は次のようになる。

$$x = -\frac{(P_1+P_2)}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{4K_1K_2P_2-(P_1-P_2)^2}}{2}$$

上関係式から  $P_1$  を消去すると次式が導き出される。

$$(x+P_2)^2 + y^2 = K_1K_2P_2 \quad (2-8)$$

(2-8) 式は、円の方程式である。これを図3に示す。

2-3 代表根と副ループ極の関係

代表根を一定位置に保つためには、副ループ極がどのような変動をすればよいか解析する。

図4に示すように副ループの極  $-P_{10}, -P_{02}$  を次のようにおく。

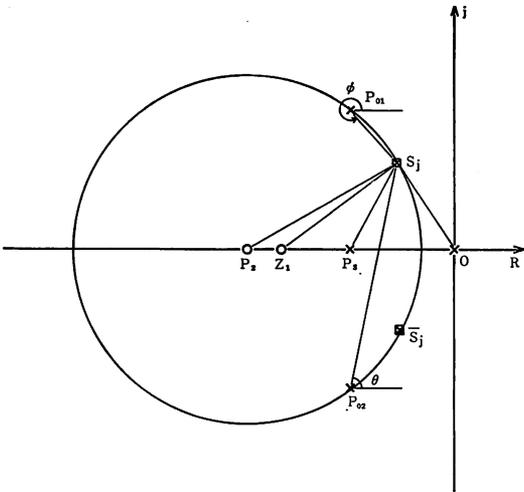


図4 系の代表根と極、零点の関係

$$-P_{01} = x + jy$$

$$P_{02} = \overline{P_{01}}$$

代表根  $S_j = a + jb$  と考えると、副ループの極  $-P_{01}$ 、 $-P_{02}$  と代表根  $S_j$  との成す角  $\phi$ 、 $\theta$  は次のようになる。

$$\phi = \tan^{-1} \frac{b-y}{x-a} \quad (2-9)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b+y}{x-a} \quad (2-10)$$

ここでパラメータ  $P_1$  の変動の影響をうける極または零点は、 $P_{01}$ 、 $P_{02}$  だけであることが、(2-5) 式より理解できる。従って、 $P_1$  の変動による  $P_{01}$ 、 $P_{02}$  の変動に対して、 $S_j$  が一定位置（根軌跡上）にあるためには、根軌跡の角度条件から  $\phi + \theta$  が一定であればよい。

$$\tan(\phi + \theta) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta \tan\phi} = K \quad (2-11)$$

(2-9) 式、(2-10) 式を (2-11) 式へ代入

$$K = \frac{2b(x-a)}{(x-a)^2 - (b^2 - y^2)} \quad (2-12)$$

(2-12) 式より

$$\left\{ x - \left( a + \frac{b}{K} \right) \right\}^2 + y^2 = b^2 \left( 1 + \frac{1}{K^2} \right) \quad (2-13)$$

(2-13) 式もまた円の方程式となることがわかる。すなわち上式を満足する  $x$ 、 $y$  の値の軌跡が円となるのである。

さて、サーボ系の極  $P_1$  の変動による副ループの極の変動が円の軌跡であることが証明され、今また、代表根

を一定位置に保つための副ループの極の変動が同じく円軌跡となることがわかった。

ここで  $P_1$  の変動による副ループの極の変動を示す軌跡円が同時に代表根も通るというように2つの軌跡円を同一なものとして考え、解析した。

代表根は次のように数式表示される。

$$S_j = -\zeta_0 \omega_0 + j \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_0^2}$$

$\zeta_0$  : 減衰定数

$\omega_0$  : 固有振動数

これを (2-8) 式に代入し、 $P_2$ 、 $K_2$  の関係を求めると

$$K_2 = \frac{(-\zeta_0 \omega_0 + P_2)^2 + \omega_0^2 (1 - \zeta_0^2)}{K_1 P_2} \quad (2-14)$$

となる。 $\zeta_0$ 、 $\omega_0$ 、 $K_1$ 、 $P_1$  は、設計時指定されるため  $K_2 = f(P_2)$  となり、 $K_2$  は  $P_2$  の関数となっている。

### 3. 主ループの解析

#### 3-1 解析ならびに定数の決定

図1に示したブロック・ダイアグラムにおける直列補償要素は速応性、定常特性の向上のために付加するものである。図2の  $G_1(S)$  は、副ループの伝達関数を示す。

$$G_1(S) = \frac{K_1(S+P_2)}{S(S+P_{01})(S+P_{02})} \quad (3-1)$$

また、図1の  $H_1(S)$  は、直列補償の伝達関数である。

$$H_1(S) = \frac{K_3(S+Z_1)}{S+P_3} \quad (3-2)$$

図1の閉ループの伝達関数  $G_c(S)$  は、

$$\begin{aligned} G_c(S) &= \frac{G_1(S) H_1(S)}{1 + G_1(S) H_1(S)} \\ &= \frac{K_1 K_3 (S+Z_1)}{S \{ S^2 + (P_1 + P_2) S + P_2 (P_1 + K_1 K_2) \} + P_2 (S+Z_1)} \\ &\quad \frac{K_1 K_3 (S+Z_1)}{(S+P_3) + K_1 K_3 \{ S^2 + (P_2 + Z_1) S + P_2 Z_1 \}} \end{aligned} \quad (3-3)$$

(3-3) 式より、主プールの特性方程式  $G_t(S)$  は、

$$\begin{aligned} G_t(S) &= S^4 + (P_1 + P_2 + P_3) S^3 \\ &\quad + (P_1 P_2 + K_1 K_2 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3 \\ &\quad + K_1 K_3) S^2 + (P_1 P_2 P_3 + K_1 K_2 P_2 P_3 \\ &\quad + K_1 K_3 P_2 + K_1 K_3 Z_1) S + K_1 K_3 P_2 Z_1 \end{aligned} \quad (3-4)$$

また上式は、(3-5) 式と書き換えることができる。

$$G_t(S) = (S+q_1)(S+q_2)(S+q_3)(S+q_4) \quad (3-5)$$

ただし、 $-q_1$ 、 $-q_2$ 、 $-q_3$ 、 $-q_4$  は特性根である。こ

こにおいて、代表根指定法であるので、(3-5) 式の 2 根は代表根でなければならない。

$$-q_1 = Sj = -\zeta_0 \omega_0 + j\sqrt{1-\zeta_0^2} \omega_0$$

$$q_2 = \overline{q_1} \quad (3-6)$$

(3-4) 式、(3-5) 式、(3-6) 式より次の関係式が得られる。

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 = 2\zeta_0 \omega_0 + q_3 + q_4 & (3-7) \\ P_1 P_2 + K_1 K_2 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3 + K_1 K_3 \\ = \omega_0^2 + 2\zeta_0 \omega_0 (q_3 + q_4) + q_3 q_4 & (3-8) \\ P_1 P_2 P_3 + K_1 K_2 P_2 P_3 + K_1 K_3 P_2 + K_1 K_3 Z_1 \\ = \omega_0^2 (q_3 + q_4) + 2\zeta_0 \omega_0 q_3 q_4 & (3-9) \\ K_1 K_3 P_2 Z_1 = \omega_0^2 q_3 q_4 & (3-10) \end{cases}$$

(3-7) 式より

$$q_3 + q_4 = P_1 + P_2 + P_3 - 2\zeta_0 \omega_0 \quad (3-11)$$

(3-10) 式より

$$q_3 q_4 = \frac{K_1 K_3 P_2 Z_1}{\omega_0^2} \quad (3-12)$$

(3-8) 式、(3-9) 式へ(3-11) 式、(3-12) 式を代入し、それぞれを(3-13) 式、(3-14) 式とする。

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2 - 2\zeta_0 \omega_0) P_3 + \left(1 - \frac{P_2 Z_1}{\omega_0^2}\right) K_1 K_3 \\ = \omega_0^2 + 2\zeta_0 \omega_0 (P_1 + P_2 - 2\zeta_0 \omega_0) - P_1 P_2 - K_1 K_2 P_2 \end{aligned} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} (P_1 P_2 + K_1 K_2 P_2 - \omega_0^2) P_3 \\ + \left(P_2 + Z_1 - \frac{2\zeta_0 P_2 Z_1}{\omega_0}\right) K_1 K_3 \\ = \omega_0^2 (P_1 + P_2 - 2\zeta_0 \omega_0) \end{aligned} \quad (3-14)$$

(3-13) 式、(3-14) 式より  $P_3$ 、 $K_1 K_3$  を求める。両式を書き換えると次のようになる。

$$e P_3 + f K_1 K_3 = g \quad (3-15)$$

$$l P_3 + m K_1 K_3 = n$$

ここにおいて

$$e = P_1 + P_2 - 2\zeta_0 \omega_0$$

$$f = 1 - \frac{P_2 Z_1}{\omega_0^2}$$

$$g = 2\zeta_0 \omega_0 (P_1 + P_2 - 2\zeta_0 \omega_0) - P_2 (P_1 + K_1 K_2) + \omega_0^2$$

$$l = P_2 (P_1 + K_1 K_2) - \omega_0^2$$

$$m = P_2 + Z_1 - \frac{2\zeta_0 P_2 Z_1}{\omega_0}$$

$$n = \omega_0^2 (P_1 + P_2 - 2\zeta_0 \omega_0)$$

(3-15) 式より

$$K_1 K_3 = \frac{g l - e n}{f l - e m} \quad (3-16)$$

$$P_3 = \frac{f n - g m}{f l - e m} \quad (3-17)$$

代表根が指定通りになるには、上式を満足する  $P_3$ 、 $K_3$  (または  $K_1 K_3$ ) でなければならない。

## 4. 感度解析

### 4-1 パラメータ感度の定義

本研究では、はじめに述べたように、サーボ系のパラメータ  $P_1$  の変動と、それによる過渡応答に及ぼす影響の大きい代表根の変動との割合を、パラメータ感度と定義した。

数式で表わすと次のようになる。

$$N = \frac{d(\ln Sj)}{d(\ln P_1)} = \frac{\partial Sj}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Sj} \quad (4-1)$$

### 4-2 感度関数

主ループの特性方程式(3-4) 式代表根  $Sj$  を代入し、 $\frac{\partial Sj}{\partial P_1}$  を求めるため、 $P_1$  について偏微分する。

$$-\frac{\partial}{\partial P_1} G_t(Sj) = 0 \text{ より}$$

$$\frac{\partial Sj}{\partial P_1} = -\frac{Sj(Sj+P_2)(Sj+P_3)}{\Delta} \quad (4-2)$$

但し、 $\Delta = 4Sj^3 + 3(P_1 + P_2 + P_3)Sj^2$

$$+ 2(P_1 P_2 + K_1 K_2 P_2 + P_1 P_3 + P_2 P_3 + K_1 K_3)Sj$$

$$+ (P_1 P_2 P_3 + K_1 K_2 P_2 P_3 + K_1 K_3 P_2 + K_1 K_3 Z_1)$$

だから、(4-1) 式、(4-2) 式よりパラメータ感度  $N$  は、

$$N = \frac{\partial Sj}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Sj} = \frac{P_1(Sj+P_2)(Sj+P_3)}{\Delta} \quad (4-3)$$

(4-3) 式は、

$$N = f(Sj, P_1, K_1, P_2, K_2, P_3, K_3, Z_1)$$

であるが、パラメータ中  $K_2$ 、 $P_3$ 、 $K_3$  は、

$$K_2 = f(P_2, K_1, \zeta_0, \omega_0)$$

$$P_3 = f(P_2, Z_1, K_2, K_1, P_1, \zeta_0, \omega_0)$$

$$K_3 = f(P_2, Z_1, K_2, K_1, P_1, \zeta_0, \omega_0)$$

の関係があるため、パラメータ感度  $N$  は、 $P_2$ 、 $Z_1$  の関数となる。

$$N = f(P_2, Z_1)$$

## 5. 感度設計

設計に当り、サーボ系(対象系)の極  $P_1 = 1.0$ 、ゲイン  $K_1 = 1.0$  と設定した。 $K_2$ 、 $P_3$ 、 $K_3$ 、 $N$  を求める

式として(2-14)式, (3-17)式, (3-16)式, (4, 3)式を使った。

$$\zeta_0 = 0.4 \sim 0.6, \quad \omega_0 = 4.0 \sim 100.0$$

$$P_2 = 10 \sim 500$$

$$Z_1 = 10 \sim 200$$

の範囲内で変化し, 定速度偏差定数  $Kv$  は,

$$Kv = \lim_{S \rightarrow 0} SG_1(S)H_1(S)$$

$$= K_1 K_3 \frac{Z_1}{P_3(P_1 + K_1 K_2)}$$

とし, 計算結果において, 設計可能な範囲内のものを選んだ。各定数の値における感度の演算結果をグラフ化し, 各定数各対し感度がどのような傾向にあるかを調べた。なお, 演算には, 本校計算機 HITAC-8250 を使用した。

### 6. 各定数と感度との関係

#### 6-1 $P_2$ —感度特性

$P_1, K_1, Z_1$  を一定,  $\omega_0$  を 4.0~100.0 とし,  $\zeta_0$  をパラメータとしたときの  $P_2$  と感度の関係を求めた。図6は  $\omega_0 = 10.0$  の場合のグラフである。グラフより  $P_2$  は, 感度を下げる要因として重要なパラメータである。また, 極小値はなく, 漸近線を求めることにより最適な  $P_2$  を求めることが可能となる。

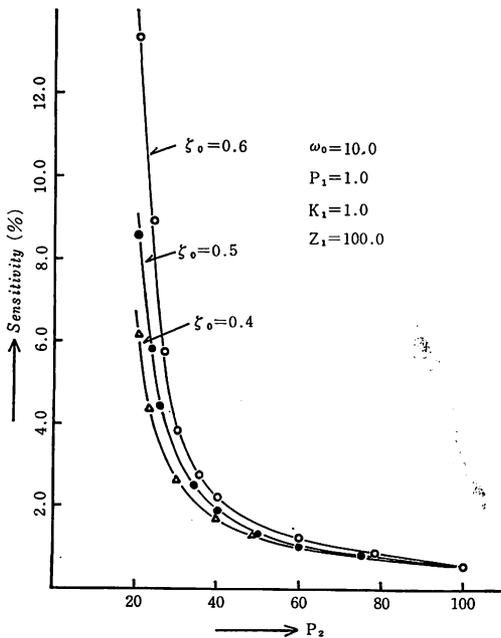


図6  $P_2$ —感度曲線

$P_2$  の値は, 代表根から遠くえらぶと感度は良好となり, 設計可能な範囲内において大きくえらぶとよいことがわかる。

#### 6-2 $Z_1$ —感度特性

$\zeta_0$  を 0.4~0.6 とし,  $\omega_0$  を 4.0~100.0,  $P_2$  をパラメータとしたときの  $Z_1$  と感度の関係を求めた。図7は  $\zeta_0 = 0.6, \omega_0 = 10.0$  の場合のグラフである。グラフをみてわかるように, 感度はほぼ一定であり,  $Z_1$  の設計は感度を下げるための要因とはならないことがわかる。

そこで,  $Z_1$  は感度を安定にするため大きくえらぶとよい。また,  $P_3$  は  $Z_1$  を決めることにより決定される。

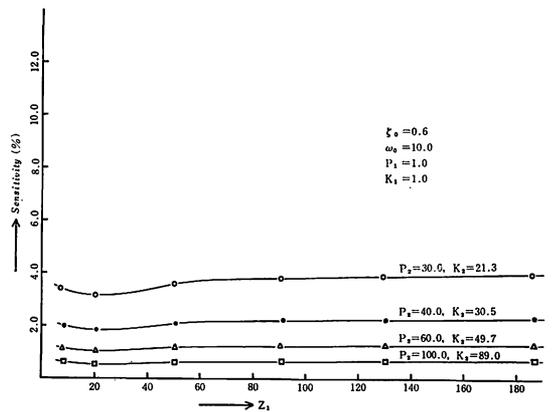


図7  $Z_1$ —感度曲線

#### 6-3 $P_1, P_{01}, S_j$ の変動状態と感度

演算結果より  $\zeta_0 = 0.5, \omega_0 = 4.0, S_j = -2.0 + j3.4641, P_1 = 1.0, K_1 = 1.0, P_2 = 60.0, K_2 = 56.27, P_{01} = 30.5 - j50.0574, Z_1 = 20.0, P_3 = 3.2, K_3 = 45.60$ , 感度=0.93(%) なる系をえらび, 根軌跡を描くプログラムを用いて,  $P_1$  の値を  $\pm 20$ (%) 変化したときの  $P_{01}, S_j$  の変動状態を調べてみた。その状態を図示したのが図5である。数値でみると,

$P_1$	$-P_{01}$	$S_j$
0.8	$-30.4 + j49.998$	$-2.0 + j3.46410$
1.0	$-30.5 + j50.057$	$-2.0 + j3.46406$
1.2	$-30.6 + j50.116$	$-2.0 + j3.46401$

となり,  $P_1$  を  $\pm 20\%$  の変動に対し,  $-P_{01}$  は  $\pm 0.175\%$ ,  $S_j$  は  $\pm 0.001\%$  となり計算機の演算誤差等を考慮するとほとんど変化しないことがわかる。

この値は, 感度関数を使用し求めた感度 (0.93%) より小さくなっている。このことは, 感度関数か, 演算誤差か, 今後の検討を要する。

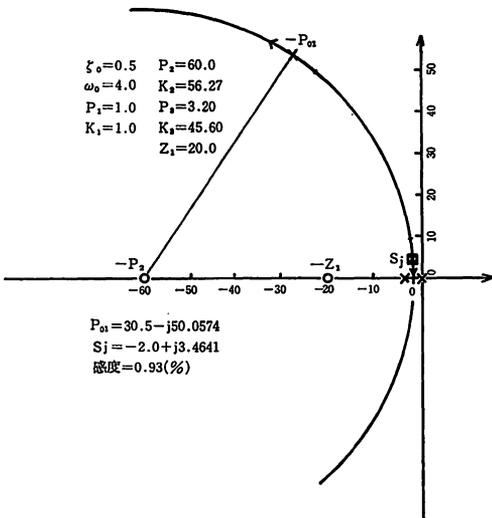


図5  $P_1, P_{01}, S_j$ の変動状態

7. 出力応答と感度

対象系に直結フィードバックのみを施した場合と、補償を施した場合の出力応答において、対象系の極  $P_1$  の変動による出力応答の変動を調べた。その応答を図8に示す。

補償を施さない場合、その変動は、応答に如実に現われ、補償を施した場合、立ち上り、速応性は、補償前より良くなり、変動もほとんどないことがわかった。

なお、出力はデジタル・シミュレーションによって求めた。

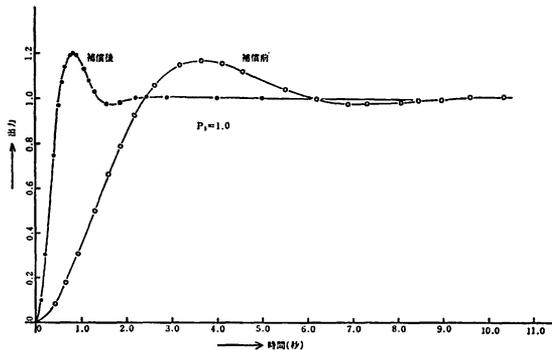


図8 出力 応 答

8. あとがき

2-2, 2-3に述べた円条件を考えることにより、設計上実現可能な範囲内において感度を数%まで下げることができた。これにより、パラメータ変動による系の

過度応答に対する影響を小さくすることができ、一応の目的は達成できた。

今後の問題点としては、感度関数に2-2, 2-3で述べた円条件を入れることと、感度をベクトルとして取り扱うこと、もう1つに感度特性(グラフ化したもの)の漸近線を求め最適値を求めることにある。

最後に、この研究を進めるにあたり、終始ご指導、ご検討をいただいた秋田大学鉱山学部電子工学科片山愛介教授、渡部倫寧助教授に深謝いたします。

また、データのまとめ、グラフ作成に力をかして下さった本校7期生、伊藤伸也君(横河電機)に感謝します。

なお、この研究は、第51回計測自動制御学会東北支部会において発表したものである。

参 考 文 献

柳原昌輝：サーボ機構の Sensitivity 設計法  
 秋田高専研究紀要 第1報~第3報  
 Richard C. Dorf: Modern Control Systems  
 Benjamin C. Kuo: Automatic Control Systems