

# 制御系の感度解析 (第2報)

柳原昌輝

## Sensitivity Analysis in Control Systems (2nd Report)

Masateru YANAGIWARA

(昭和49年10月31日受理)

### 1. ま え が き

制御系において、目標値を与えその伝達特性を求めるとき、パラメータ変動に対し、その特性の変動をできるだけおさえることが問題となる。

本文では、第一報にのべた Rajko Tomovic と Mimir Vukobratovic による 0 感度理論を用い、サーボ機構を例にとって解析し検討を試みた。この結果 0 感度なるための補償法は得られたが、その補償を対象系に施す際、実現性(回路設計)に問題があり、今後の検討を必要とする。

なお、この理論解析上、Signal flow の考えを必要とするため、この点についてもふれる。

### 2. Signal Flow Graph

ブロック線図は、制御および入力変数の関係を表わす場合適切である。しかし、複雑な System を表わすには不適當である。

Mason は System を線分で表わし、System 変数間の関係を定めた。この直線経路による法を Signal Flow Graph といい、利点 (block diagram と比して) として、要約手順または図の操作なしに System 間の Gaim 公式を得ることができる。Signal Flow Graph とは、節点を方向性のある枝で結んだもので、線形関係の集合の図示と考えてよい。いいかえると変数の相互依存を示すため方程式群を描く方法である。

例をあげて Signal Flow Graph について考えてみよう。

◎ 次式で表わされる連立方程式がある。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \quad (2-1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \quad (2-2)$$

ここで  $r_1, r_2$  は入力変数、 $x_1, x_2$  は出力変数である。

(2-1)、(2-2) 式の Signal Flow Graph は 図-2-1 に示す。

(2-1)、(2-2) 式を変形すると

$$x_1(1-a_{11}) + x_2(-a_{12}) = r_1 \quad (2-3)$$

$$x_1(-a_{21}) + x_2(1-a_{22}) = r_2 \quad (2-4)$$

となり、両式を解いて

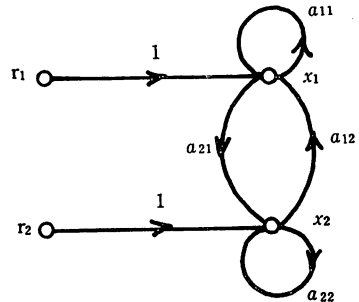


図-2-1

$$x_1 = \frac{(1-a_{22})r_1 + a_{12}r_2}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{(1-a_{22})}{\Delta} r_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} r_2$$

$$x_2 = \frac{(1-a_{11})r_2 + a_{21}r_1}{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}} = \frac{(1-a_{11})}{\Delta} r_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} r_1$$

解の分母は determinant  $\Delta$  であり

$$\Delta = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

となる。

#### 2-1 System 伝達関数

一般に独立変数  $x_i$  と従属変数  $x_j$  の間の伝達関数  $T_{ij}$  は Mason の loop 法則により次式で表わされる。

$$T_{ij} = \frac{\sum_k P_{ijk} \Delta_{ijk}}{\Delta}$$

ただし、 $P_{ijk}$ : 変数  $x_i$  から  $x_j$  にいたる  $k$  番目の経路のゲイン (伝達関数)

$\Delta_{ijk}$ : 経路  $P_{ijk}$  の余因子\*

$\Delta$ : 行列式\*\*

\*1: 余因子とは  $k$  番目の経路にさわる loop を除いた行列式である。

\*2: 行列式  $\Delta$  は

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{m=1}^M L_m L_q - \sum_{r=1}^R L_r L_s L_t + \dots$$

この式で $L_n, L_m \dots$ 等は loop gain の値に等しい。  
よってこの式を求める法則は次のようになる。

- $\Delta = 1 - (\text{すべての異なる loop gain の和})$
- $+ (\text{接触しない 2 個の loop のすべての組み合わせのゲイン乗積})$
- $- (\text{接触しない 3 個の loop のすべての組み合わせのゲイン乗積})$
- $+ \dots$

例 1, 図 2-2 に示す系の伝達関数を求めてみる。

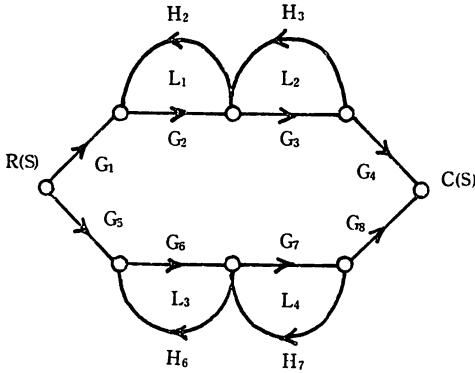


図 2-2

経路 1:  $P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$

経路 2:  $P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$

個別 loop としては

$$L_1 = G_2 H_2, L_2 = G_3 H_3, L_3 = G_6 H_6, L_4 = G_7 H_7$$

よって行列式  $\Delta$  は

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$$

経路 1 に対する余因子は

$$L_1 = L_2 = 0, \Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

経路 2 に対する余因子は

$$L_3 = L_4 = 0, \Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

したがって System 伝達関数は

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} = T(s) &= \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 (1 - L_3 - L_4) + G_5 G_6 G_7 G_8 (1 - L_1 - L_2)}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1 L_3 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4} \end{aligned}$$

### 3. 感度ダイポールと感度関数

これは, Graph  $G_m$  を構成することと,  $G_m$  で  $M \sim N$  の伝達関数が次式で与えられるような 2 つの node  $M$  と  $N$  を見出す事である。

$$T_m(s) = \sum \frac{P_i'(s) \Delta_i'}{\Delta'} = S_m^T \quad (3-1)$$

Graph  $G_m$  は branch  $m$  についての元の Graph  $G$  の感度 graph といわれる。感度関数  $S_m$  は,  $P_i', \Delta_i', \Delta'$  に

展開できるから, 1 つの関数  $S_m^T$  に相当する一組の Graph  $G_m$  が存在する。(2-30) 式\*を考え, その間の伝達関数が次式であるような node  $M$  と  $N$  及び Graph  $G$  を決める。\*第一報

$$T'(S) = \frac{\Delta^m}{\Delta} \quad (3-2)$$

(3-1) 式より Graph  $G'$  は次式に従って構成されなければならない。

(3-1) 式 = (3-2) 式

$$\sum_n \frac{P_i' \Delta_i'}{\Delta'} = \frac{\Delta^m}{\Delta} \quad (3-3)$$

この方程式の最も簡単な解は次のようになる。

$$i=1 \quad (3-4)$$

$$\Delta'(S) = \Delta(S) \quad (3-5)$$

$$P_i'(S) = 1 \quad (3-6)$$

$$\Delta_i'(S) = \Delta^m(S) \quad (3-7)$$

(3-5) 式の関係はループの配列やそれらの特性について, Graph  $G'$  と元の Graph  $G$  との間の同一性を決定する。又, (3-4) 式と (3-6) 式の関係から Graph  $G'$  の node  $M$  と  $N$  間には唯一の direct path よりないことと, その伝達関数が 1 に等しい事がわかる。さらに (3-7) 式より, この伝達関数 1 の path はすべてのループに触れている位置でなければならない。

さらに, 要求されている Graph  $G'$  は元の Graph  $G$  の branch  $m$  で伝達関数 1 をもつ path を挿入する事により得られる。この単位伝達関数を感度ダイポールとよぶ。図 3-1 は元の Graph  $G$  を示し, 図 3-2 は感度ダイポールを挿入することにより得られた Graph  $G'$  である。

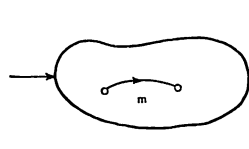


図 3-1

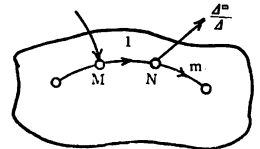


図 3-2

もし, 新しい node  $N'$  が Graph  $G'$  に導入されるならば, 図 3-3 のようになり, node  $M$  と  $N'$  間の伝達関数は次のように示される。

$$T' = \frac{\Delta^m}{\Delta} - 1 \quad (3-8)$$

入力として  $M$ , 出力として  $N'$  の伝達関数 1 の path  $N'$   $M$  は逆感度ダイポールと呼ばれている。それを図 3-4 に示す。

次に感度関数について述べる。

感度ダイポールは元の graph で branch  $m$  の 3 つの可

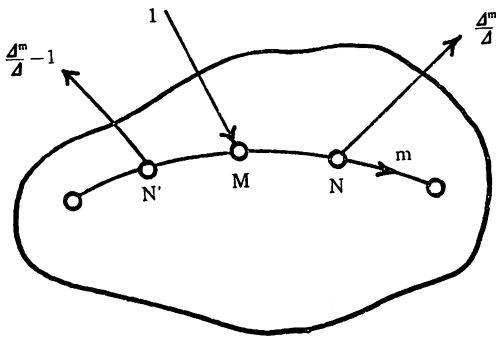


図-3-3

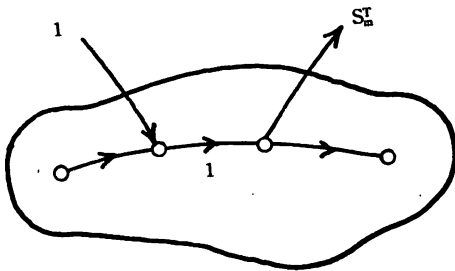


図-3-4

能な position の各々の場合について対数感度関係の構成上の説明に使われる。

Position I : branch m が direct path 内にある場合。  
 $S_m^P = \Delta_1^m / \Delta_1 = 1$  であるから (2-30) 式\*は次のようになる。

$$S_m^T = \frac{\Delta^m}{\Delta} \quad (3-9)$$

この感度 Graph  $G_m$  は元の graph の branch m内に感度ダイポールを挿入する事により得られる。図3-5に示す。

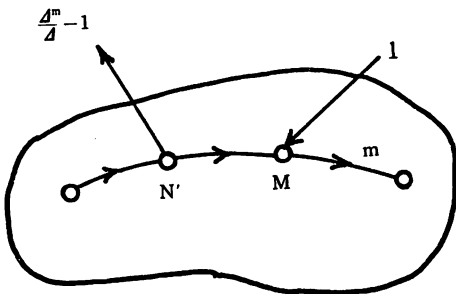


図-3-5

path に触れない loop にも属さない場合。

$S_m^P = 0, \Delta_1^m / \Delta_1 = 1$  であるから

$$S_m^T = \frac{\Delta^m}{\Delta} - 1$$

感度 Graph  $G_m$  は G の branch m 内に逆感度ダイポールを挿入することにより得られる。図3-6に示す。

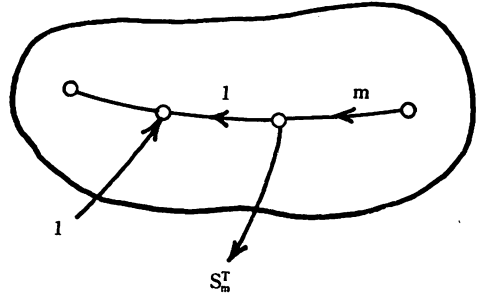


図-3-6

Position III : branch m が direct path にふれない loopの少なくとも1つに属する場合。

この時  $S_m^P = 0$

$$S_m^T = -\frac{\Delta^m}{\Delta} - \frac{\Delta^m}{\Delta_1}$$

感度 Graph  $G_m$  は2つの部分より成り立つ。その1つが G の branch m 内に感度ダイポールを挿入することにより得られ、又他の1つが相応する subgraph  $G_1$  の branch m 内に感度ダイポールを挿入することによって得られる。図3-7に2つの部分の内部結合を示す。

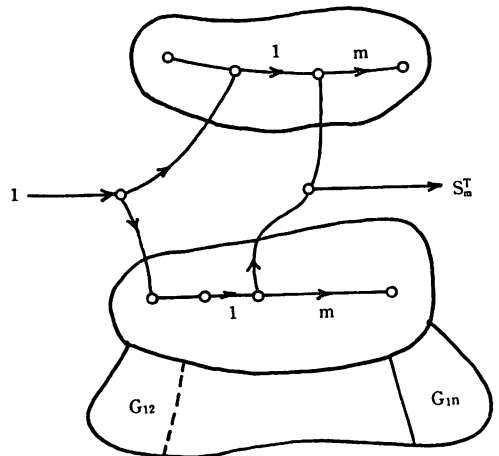


図-3-7

Position II : branch m が direct path にも、又 direct

4. サーボ機構のパラメータ不変性と0感度

4-1 直列補償(その1)

サーボ機構の伝達関数は、一般に次式で表わされる。

$$G_1(S) = \frac{K_1}{S(S+P)} \quad (4-1)$$

次に、速応性、安定性をよくするために、次式の伝達関数をもつ補償回路を直列に挿入する。図4-1にそのブロック線図を示す。

$$H(S) = \frac{K_2(S+Z_1)}{S+P_3} \quad (4-2)$$

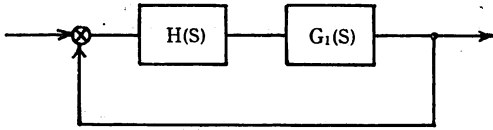


図4-1

このブロック線図を signal flow graph にすると図4-2のようになる。

次に  $a=K_2, b=1/S, C=Z_1, d=1/S, e=K_1, f=1/S,$   
 $g=1, h=-P_3, i=-P, j=1, K=1$  とおくと、図4-3のようになる。

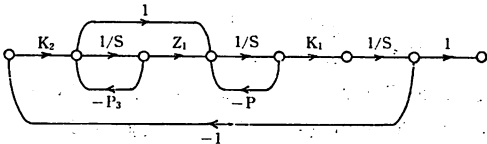


図4-2

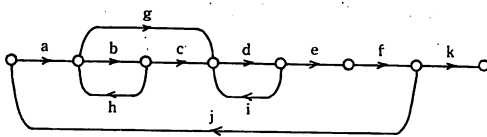


図4-3

この graph で branch P の部分が変動するとき、全体の伝達関数が0感度で、全く変動しないようにするのが問題である。ここで、第一報の“パラメータ不変性と0感度”で述べた0感度条件が満たされる。

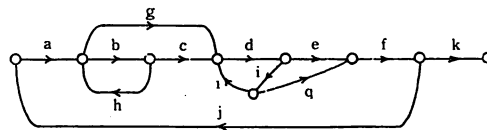


図4-4

$$\begin{aligned} P_1 &= agdiqfk & L_1 &= bh \\ P_2 &= abcdiqfk & L_2 &= di \\ P_3 &= agdefk & L_3 &= agdefj \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= abcdefk & L_4 &= abcdefj \\ L_5 &= abcdiqfj \\ L_6 &= agdiqfj \\ \Sigma\beta &= \frac{P_1 d_i}{\Sigma P_i d_i} = \frac{P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + P_4 d_4}{P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + P_4 d_4} \quad (4-3) \end{aligned}$$

ここで  $\Sigma\beta$  は変動要素を含まないため  $P_1=P_2=0$  とし

$$\Sigma\beta = \frac{P_3 d_3 + P_4 d_4}{P_1 d_1 + P_2 d_2 + P_3 d_3 + P_4 d_4} \quad (4-4)$$

また 
$$S_{dir} = \frac{\Delta dir}{\Delta} = \frac{\text{補償前の変動branchを含まない}\Delta}{\text{補償branchをいれた時の}\Delta} \quad (4-5)$$

$$= \frac{1 - (L_1 + L_2 + L_3)}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6) + L_1 L_2} \quad (4-6)$$

0感度条件より

$$\Sigma\beta = S_{dir}$$

なので (2-4) 式 = (2-6) 式 (4-7)

ここで  $b=d=f, g=k=-j$  とおくと

$$\begin{aligned} P_1 &= agdiqfk = ab^2 g^2 i q & L_1 &= bh \\ P_2 &= ab^2 c i q & L_2 &= bi \\ P_3 &= ab^2 e g^2 & L_3 &= -ab^2 e g^2 \\ P_4 &= ab^2 c e g & L_4 &= -ab^2 c e g \\ & & L_5 &= -ab^2 c i q \\ & & L_6 &= -ab^2 g^2 i q \end{aligned}$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$$

となり0感度条件はこれらを(4-7)式へ代入し、整理すると  $(eab^2cg + ab^2eg^2)q + be(bh-1)$

$$= q(1 - bh + ab^2eg^2 + ab^2ceg)$$

この式において  $bh-1 \neq 0$  ならば

$$q = -be \quad (4-8)$$

を得る。

ここで、補償前の伝達関数  $T$  と補償後の伝達関数  $T'$  とを求めてみる。補償前の flow graph の伝達関数は

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Sigma P_i d_i}{\Delta} = \frac{agdef}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2} \\ &= \frac{ab^2eg^2 + ab^2ceg}{1 - bh - bi + ab^2eg^2 + ab^2ceg + b^2h} \\ &= \frac{A}{B} \text{とおく} \end{aligned}$$

$b=1/S, g=1$  とすると

$$T = \frac{ae(S+c)}{S^3 - (h+i)S^2 + (ae+hi)S + aec} \quad (4-9)$$

補償後の flow graph の伝達関数は、

$$T' = \frac{A + ab^2g^2iq + ab^2cigq}{B + ab^2cigq + a^2g^2iq}$$

$b=1/S, g=1, q=-be$  とおき  $T'$  に代入すると

$$T' = \frac{ae(s+c)}{S^3 - hS^2 + aeS + aec} \quad (4-10)$$

この  $T'$  の式でわかるように、 $T'$  は branch  $i$  に無関係となる。

4-2 直列補償 (その2)

ここでは、 $G_1(s)=K_1/S(S+P)$  に次式で示される補償回路を直列に入れた場合を考える。

$$H(s) = \frac{K_2 S}{S+P_1} \quad (4-11)$$

この時の flow graph は、図4-5で示される。

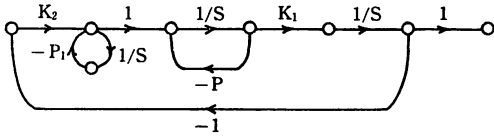


図4-5

$a=K_2, b=1, c=1/S, d=K_1, e=1/S, f=1, g=1/S, h=-P_1, i=-P, j=-1$  とおくと図4-5は図4-6になる。

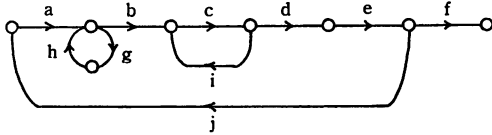


図4-6

前述のように、0感条件を満たす新しい branch  $q$  を加えた flow graph を次に示す。

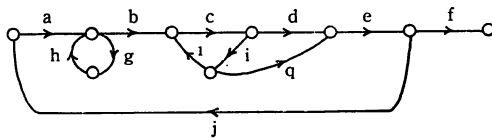


図4-7

$$\begin{aligned} P_1 &= abciquef & L_1 &= gh \\ P_2 &= abcdef & L_2 &= ci \\ & & L_3 &= abcdej \\ & & L_4 &= abciquej \end{aligned}$$

0感度条件より

$$\frac{P_2 A_2}{P_1 A_1 + P_2 A_2} = S_{dir} = \frac{1 - (L_1 + L_2)}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2} \quad (4-12)$$

$$A_{dir} = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$A = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2$$

ここで  $b=f=-j, c=e=g$  とおく

$$\begin{aligned} P_1 &= ab^2c^2iq & L_1 &= ch \\ P_2 &= ab^2c^2d & L_2 &= ci \\ & & L_3 &= -ab^2c^2d \\ & & L_4 &= -ab^2c^2iq \end{aligned}$$

0感度条件は、

昭和50年2月

$$\frac{ab^2c^2d}{ab^2c^2iq + ab^2c^2d} =$$

$$\frac{1 - ch + ab^2c^2d}{1 - ch + ab^2c^2d + (-ci + ab^2c^2iq + c^2hi)}$$

両辺の逆数をとると

$$1 + \frac{ab^2c^2iq}{ab^2c^2d} = 1 + \frac{-ci + ab^2c^2iq + c^2hi}{1 - ch + ab^2c^2d}$$

$$\frac{iq}{d} = \frac{-ci + ab^2c^2iq + c^2hi}{1 - ch + ab^2c^2d}$$

$$q(1 - ch) = -cd + c^2dh$$

$$ch - 1 \neq 0$$

$$\therefore q = -cd$$

$$(4-13)$$

補償前と補償後の伝達関数  $T, T'$  を求めると

$$T = \frac{ab^2c^2d}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2}$$

$$= \frac{ab^2c^2d}{1 - ch - ci + ab^2c^2d + c^2hi} = \frac{A}{B}$$

$b=1, c=1/S$  とおく

$$T = \frac{(1/S^2)ad}{1 - (1/S)h - (1/S^2)ad + (1/S^2)hi}$$

$$\therefore T = \frac{ad}{S^2 - (h+i)S + ad + hi} \quad (4-14)$$

$$T' = \frac{ab^2c^2d + ab^2c^2iq}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2}$$

$$= \frac{A + ab^2c^2iq}{B + ab^2c^2iq}$$

$b=1, c=1/S, q=-cd$  とおく

$$T' = \frac{A - (1/S^2)adi}{B - (1/S^2)adi}$$

$$= \frac{adS - adi}{S^2 - (h+i)S^2 + (ad+hi)S - adi}$$

$$= \frac{ad(S-i)}{(S-i)(S^2 - hS + ad)}$$

$$S - i \neq 0$$

$$\therefore T' = \frac{ad}{S^2 - hS + ad}$$

$$(4-15)$$

(4-14) 式と (4-15) 式より、補償後には branch  $i$  が  $T'$  に無関係になっている。

5. あとがき

本研究は、最近発表された flow graph による感度解析であり、0感度補償回路設計について2、3例を上げて考察した。その結果、0感度設計をするため対象系に施すべき補償は  $-\frac{1}{S}$  と0感度補償前の変動 branch を抜ける branch (図4-3では branch  $e$ , 図4-6では

branch  $d$ ) との積によって  $q$  が与えられることが分った。これにより、0 感度補償は一定の規則をもって与えられるが、補償後の flow graph をみても分るように、補償のための flow が対象系自体の内部へ入ってきているのが分る。このため、対象系を変えずに補償回路を設計するという実現性の点において問題があることがわかった。補償後の flow の等価 flow graph を描いて検討していくのも一つの方法ではないかと思われる。一応理論的には解析した訳であるが、実現性の点でまだ

まだ検討を要するものである。

終りに、この研究を進めるにあたり終始ご指導、ご検討いただいた秋田大学片山愛介教授、渡部倫寧助教授に感謝いたします。

#### 参 考 文 献

- Rajko Tomovic and Miomir Vukobratovic :  
General Sensitivity Theory  
Richard C. Dorf : Modern Control Systems