

有限要素法によるチャッキングした円板の応力解析

— チャッキングの基礎研究 (第1報) —

門 脇 義 次

Stress Analysis of Chucked Disk by Finite Element Method

— Basic Study of Chucking (1st report) —

by Yoshitugu KADOWAKI

(昭和49年10月31日受理)

1. 緒 言

工作機械を構成するものを2つに大別すると、構造要素部品と構造要素結合部となり、工作機械の剛性を増すためには両者の剛性を同時に増す必要がある。

しかるに従来剛性に関する研究は構造要素部品に関するものが主であり、構造要素結合部についてはボルト結合部に関する益子らの一連の報告^{2), 3)}があるとはいえ、チャックなどの場合にこれをそのまま適用することができない。

チャックはそれ自身結合の機能を待つ構成要素の1つとみなすことができる。ここでチャックの爪と被削物との接触部にのみ注目しても次のような点からの検討が必要と思われる。その第1は上に述べた剛性に関するものであり、この部分の曲げ剛性が低いと仕上面にうねりを生ずる⁸⁾。その第2はボルトの締付けの研究³⁾に類例が見られるように、爪が被削物を押す力の評価の方法とその大きさに関するものである。すなわち、チャックに外部から与えたトルクを変換して締付け力を得ているわけであり、手軽な方法として、加えるトルクを測定しても多くの摩擦部分が介在するため、これらの機構が明らかにされない限り締付け力を正確に知ることは出来ない。また締付け力が正しく測定出来るとしてもどの程度の締付け力が適切かを明らかにしておく必要がある。その第3は接触機構の研究⁹⁾に見られるように真実の接触面積と喰込量に関するものである。焼爪の場合には、チャッキングしただけのものと切削を終えてからのものとでは圧こんの大きさが異なり、追い込んで締付け力を与えてはならないので極端な場合には切削の進行につれ締付け力が減少して行くことも考えられる。

以上のようにチャックの爪と被削物の接触部分は多方

面からの検討が必要となるが第一段階として、締付け力を仮定したとき被削物の応力分布がどのようになるかを検討しておくことは意義のあることと思われる。

本報では有限要素法によって応力分布を解析した結果を報告する。しかし形状が単純であるため必ずしも有限要素法による必要はなく諸種の数値解の他、解析解を得ることも困難ではない⁵⁾。ここでは被削物の降伏を考慮する場合、三次元への発展などを考慮して有限要素法によった。さらに比較のために光弾性実験法を加えた。

2. 問題の設定、仮定及び境界条件

チャッキングした被削物に生ずる応力分布を二次元問題として扱うため三ツ爪スクロールチャックにチャッキングした円板について解析する。この様子を図1に示す。なお問題を単純にするために次の仮定をおいた。すなわち

- 1) 薄い円板をチャッキングしたとき、この円板は平面応力状態にある。
- 2) 円板の変形に際しては爪との間に摩擦がない(これは実際のチャックで許されることではないが、接触部が充分狭ければこのように近似出来る)
- 3) 円板上爪の当る位置を図1のようにA, C, E, とするとき応力分布は軸AOD, COF及びEOBを対象である。

従って円板の一部AOFを解析すれば充分であり、これによって計算機の記憶容量を減らすことができる。

チャッキングした円板の解析に供した部分を図2に示す。対象性から \overline{AO} , \overline{FO} の方向にせん断力が作用しないのでこの直線上の節点は図のように摩擦なくすべることができる。と考える。

また、同図に荷重点A付近を拡大して示す。後述する

ように三角形の要素に分割したとき、境界上にある仮想的な点(節点)に作用する荷重を示すものである。すなわち、直径40mmの円板に先端の長さ2mmの爪が接触すると、爪からの力Pが接触部の等分布荷重として

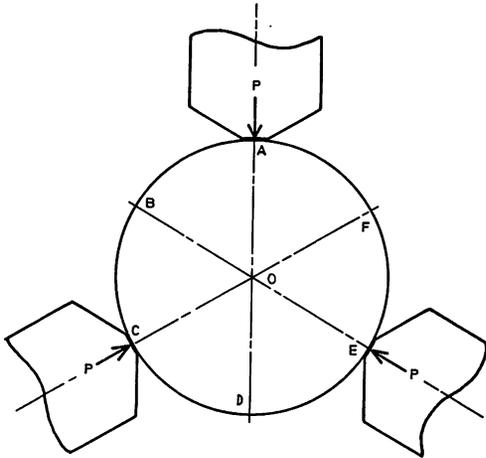


図-1 円板のチャッキング状態

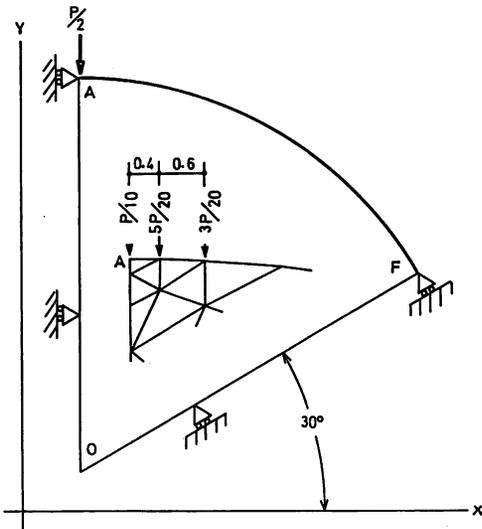


図-2 解析部分と境界条件

作用するものとすれば、図示のように節点の位置を考慮して $P/10$, $P/4$, $3P/20$ なる等価な集中荷重が作用するものと考えてよい。

3. 解析原理と計算手順

一般の2次元問題の例にならない、2次元連続体を微小な3角形要素に分割する。そして要素内で歪は一様である、体積力は無視出来る、外力が作用しても温度変化はないなどの仮定をおき仮想仕事の原理によって次の関係

昭和50年2月

を導びく。

$$\{p\} = [k] \cdot \{d\} \quad (1)$$

ここで $\{p\}$ は節点に作用する外力であり、 $\{d\}$ は節点の変位、 $[k]$ は要素剛性マトリックスと呼ばれ次のように与えられる。

$$[k] = d \cdot t \cdot [N]^T \cdot [De] \cdot [N] \quad (2)$$

ここで d は三角形要素の面積、 t は平均の板厚 $[N]$ 及び $[De]$ はそれぞれ以下のように与えられる。

$$[N] =$$

$$\begin{pmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix}$$

ここで x_i , y_i などは三角形の頂点(節点)の座標である。

$$[De] = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{pmatrix}$$

ここで E は板のヤング率、 ν は同じくポアソン比である。

次に三角形の頂点(節点)を通してのみ力の伝達が行われるものとして構造全体の剛性マトリックス $[K]$ を組立て、全節点の力 $\{P\}$ と変位 $\{D\}$ との関係を得る。

$$\{P\} = [K] \cdot \{D\} \quad (3)$$

各節点に対して、力又は変位のいずれかを未知として

(3)を解き、変位、外力等を全て求める。

各三角形要素の応力 $\{\sigma\}$ 、ひずみ $\{\epsilon\}$ はそれぞれ

$$\{\epsilon\} = [N] \cdot \{d\}$$

$$\{\sigma\} = [De] \cdot [N] \cdot \{d\}$$

によって求める。

また、節点 i の変位出来る方向が X , Y いずれの方向にも一致せずだけ傾いている場合⁽⁷⁾には始めの座標系を ϕ だけ回転した局所座標系なるものを考えてこれに関する変位 $\{di^*\}$ 、力 $\{pi^*\}$ によって $\{di\}$ 、 $\{pi\}$ を次のように表わす。

$$\{di\} = [L] \cdot \{di^*\} \quad (4)$$

$$\{pi\} = [L] \cdot \{pi^*\}$$

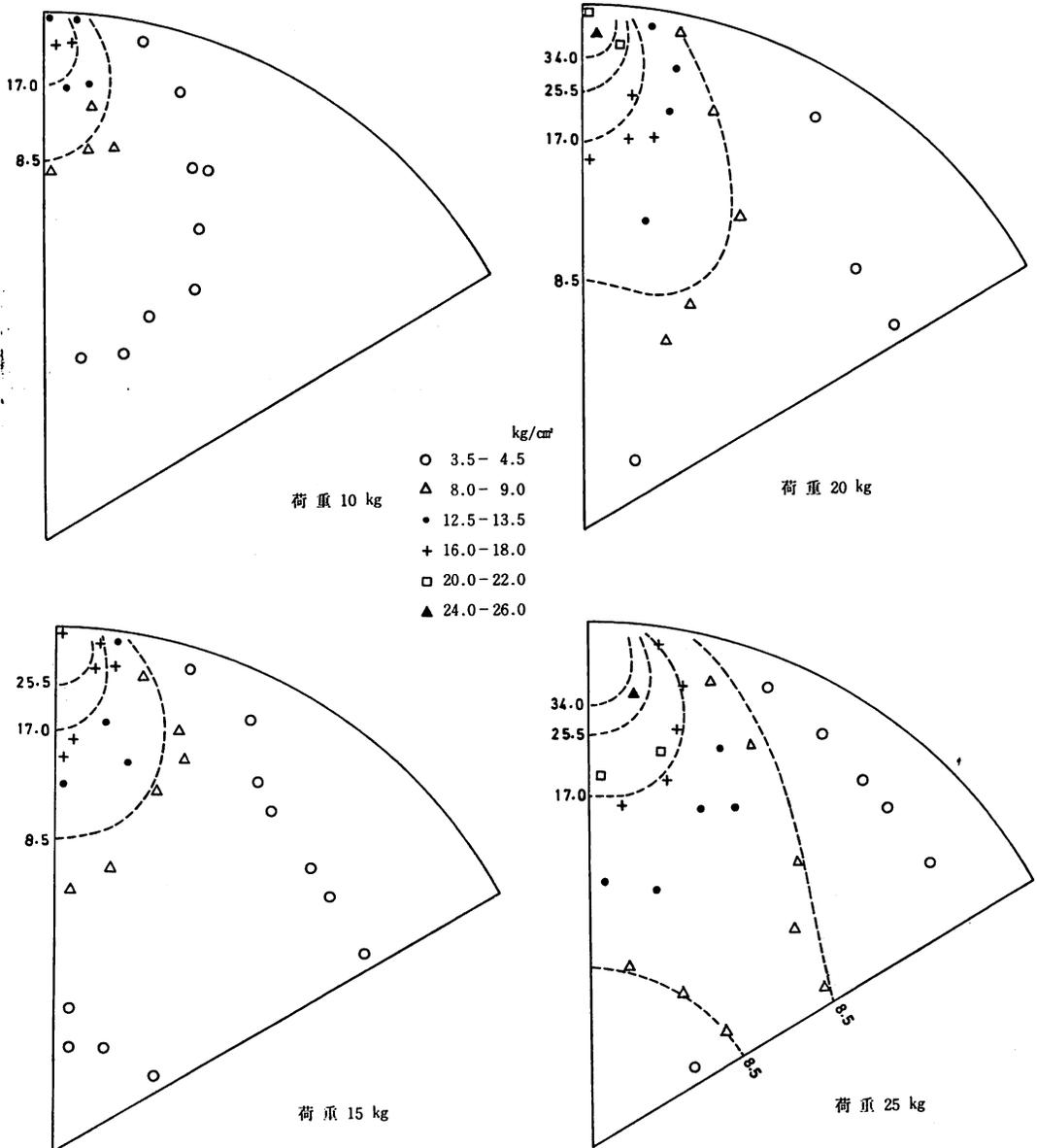
ただし

$$[L] = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

であり、(3)における $\{D\}$ 、 $\{P\}$ の要素として解けば i 点については局所座標系に関する解が得られる。

4. 解析結果

1) 最大せん断応力の分布 最大せん断応力の分布状態について、計算結果によるものと等色線によるものと



図一 荷重の変化による最大せん断応力の分布

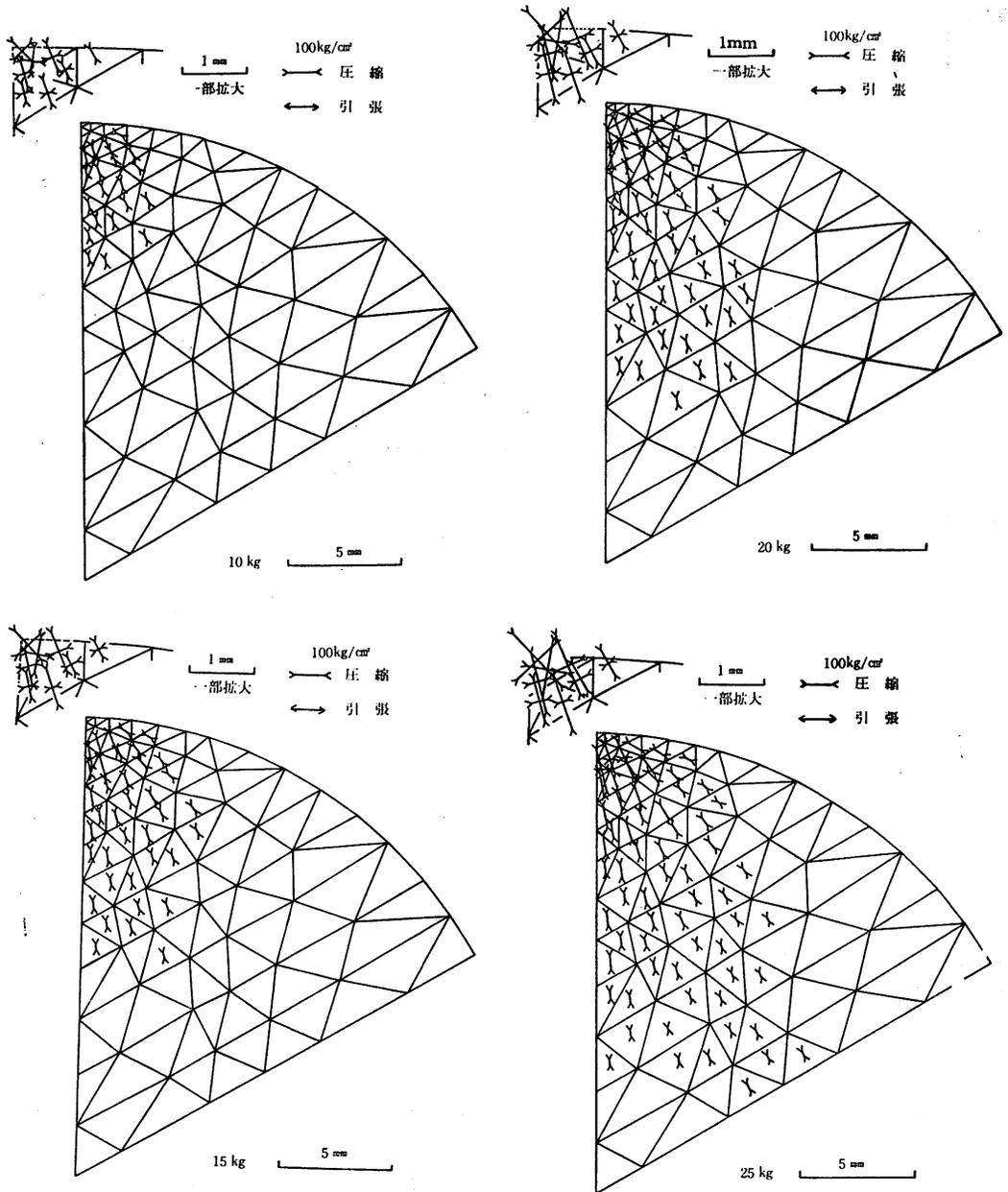
を比較して図3に示す。ただし、計算の場合には結果の得られる点が離散的であるために最大せん断応力の値がある範囲に入るものをまとめて示しておいた。

有限要素法では荷重を境界上の節点に作用する集中荷重として与えるが、図3の場合も同様である。しかも、荷重の大きさを変えてもこれを各節点に振り分ける際の比は変えていない。このことが許されるか否かは計算結果によるものと等色線によるものとを比較することによって吟味出来るものであって、予備計算によれば、前述の集中荷重分布が最も単純でかつ最も等色線による結果

に近い値が得られている。

図3から、荷重の増大につれて等しい最大せん断応力の範囲の拡がって行く様子が入り、各点での最大せん断応力の値は荷重の比になっている。

2) 主応力の分布 計算結果による主応力の分布状態を図4に示す。これによって等主応力の範囲が荷重の増大につれ拡がって行く様子が分る。また主応力軸方向は荷重の大きさによって変わらず、主応力の大きさは荷重の比になっている。これらのことも接触点での荷重分担の比を変えていないことによると思われる。



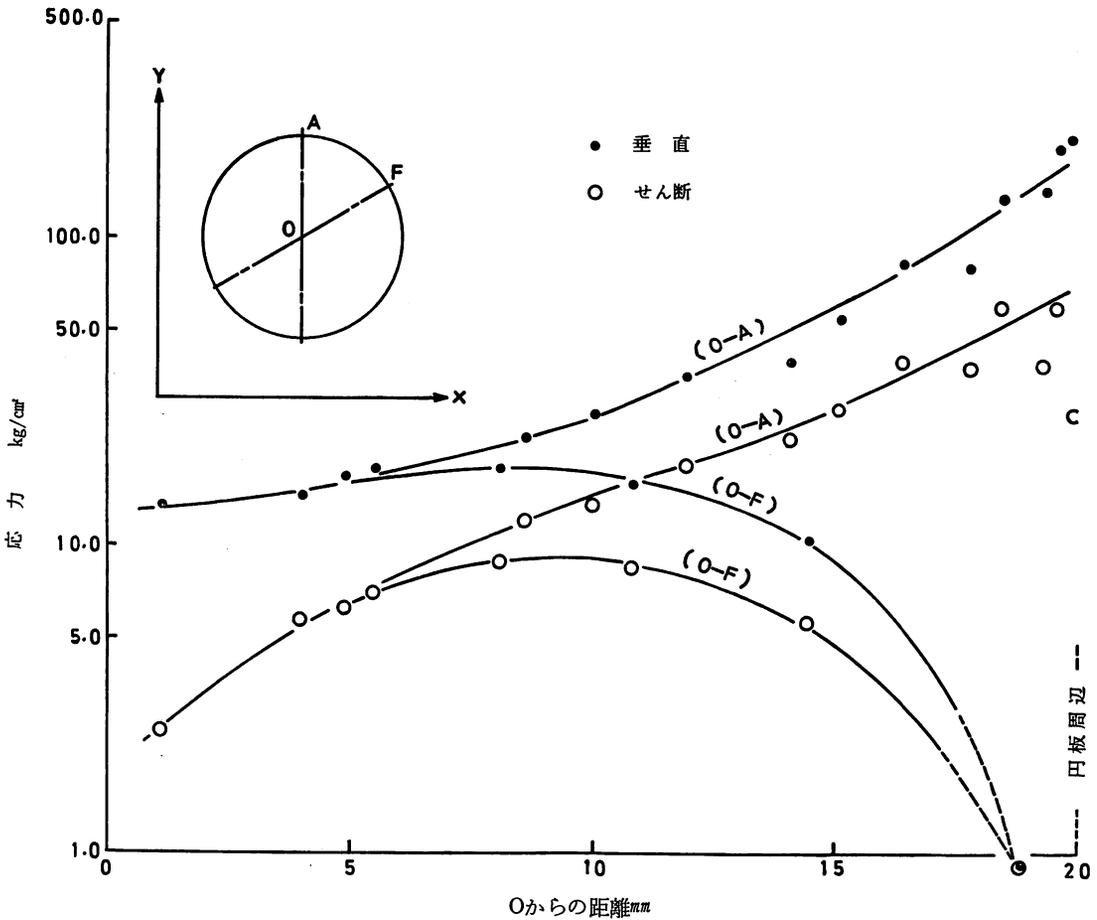
図—4 荷重の変化による主応力の分布

3) 円板の主なる半径上での応力分布 図1における半径OA, OFは有限要素法による計算の際には図2に示すような支持点を持つ境界であり, 前述のようにこれらの方向にはせん断応力が作用しないと考えた。

従ってOA, OF, は主応力軸方向となるからOA上で考えたX, Y方向の垂直応力及びOF上で考えた局所座標系方向の垂直応力はそれぞれ主応力に等しく, OA, OFの方向と45°をなす断面に作用するせん断応力は最大せん断応力に等しい。

このような半径上の点で考えた応力分布状態を図5に示す。ただし応力の値は各半径上に一边を有する三角形要素の平均であり, 正確に半径上の値を示してはいない。しかし, 三角形要素を充分細かくすれば半径上での応力と見なすことが出来る。図5では半径OA, OFより約0.6mm内側(解析に供した円板の1部分 AOFの境界より)における計算値である。

図5を参照して, 最大圧縮応力はAO上で荷重点から中心に近づくにつれ小さくなる。しかし中心Oにおいて



図一五 半径上の応力分布 (荷重25kgの場合)

もゼロにはならない。一方OF上では中心Oに近い部分ではOAにおけるものにはほぼ等しくこれより漸減して自由境界ではゼロとなる。

最大せん断応力も同様にOA上では荷重点から離れるにつれて小さくなり、中心ではゼロとなる。一方OF上では中央に最大値があり、中心と自由境界ではゼロとなる。

5. 結 言

円板をチャッキングした場合にこの円板に生ずる応力状態を有限要素法によって求め、等色線との比較により、チャックの締付力は円板の接触部における等分布荷重として作用すること。主応力及び最大せん断応力は締付力に比例すること。及び締付力を仮定したときの応力分布などを明らかにすることが出来た。

光弾性実験に協力戴いた本校実習係の諸氏、有限要素法のプログラム作成に協力戴いた本校卒業生及び現学生諸君に感謝致します。なお有限要素法に関する諸計算については東北大学大型計算機センターを煩わした。

文 献

- 1) 薦, 山地: 機械学会誌 76, 3 (1973) 3482
- 2) 益子ほか2名: 機械学会論文集 34—262 (昭43—6) 11593
- 3) 池田ほか2名: 機械学会論文集 36—290 (昭45—10) 1735
- 4) 伊東, 益子: 機械学会論文集 37—295 (昭46—3) 6225
- 5) S.P. Timoshenko & J.N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill 3rd Ed. 好学社, P.122 & : 538
- 6) 山田嘉昭: マトリックス材料力学 培風館 (1970) p 101
- 7) 三本木ほか2名: 有限要素法による構造解析プログラム (1970) p 86, p 233
- 8) 門脇, 後藤: 秋田高等研究紀要 7 (1972) 33
- 9) 久門: 機械学会論文集 35—272 (昭44—4)
- 10) 岸波ほか3名: 精機学会誌 39—10 1023