

# 負性抵抗を含む非線形発振回路の解析について

佐藤 武 治

## 1. まえがき

これまで使用されてきた真空管やトランジスタのような、3端子能動素子に対して負性抵抗をもつ2端子能動素子が開発されている。これはその構造上、周波数特性が向上し、動作原理も亦これまでのものと全く違って居り、将来共この種の素子の開発される可能性は大きく、エサキダイオードなどはその代表的なものとしてされている。このような考え方からすれば三極真空管についての二次電子放射効果は知りつくされた現象に過ぎないけれども、これを3端子の controlled source 形能動素子として再検討することも、その解析のあり方によっては意義あるものと考え、エサキダイオードと同様の電圧制御形負性抵抗であるダイナロン現象について、その近似の特性曲線を検討し、且つこの現象から導きだされる非線形微分方程式の解析を研究の主目的とした。

## 2. 基本の回路について

現在考慮している電圧制御回路を図1に示す。

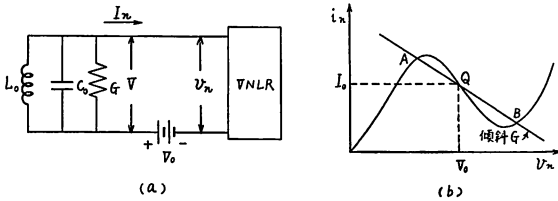


図1 (a) 基本的な発振回路 (b) 電圧・電流特性

これは最も基本的な発振回路であり、 $V_0$  は負性抵抗に与える動作電圧である。このような回路の方程式を求めするため、先づ VNLN (Voltage-controlled nonlinear resistance) の特性を  $i_n = f(v_n)$  とする。この際 VNLN を流れる電流は、

$$I_n = f(V_0 - V)$$

であって、エネルギー蓄積素子  $L_0, C_0$  及びコンダクタンスを流れる電流の和に等しい。したがって次式が得られる。

$$f(V_0 - V) = C_0 \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L_0} \int V dt + GV \quad (1)$$

ここで  $V = v_n - V_0$ ,  $I_n = I_0 + i_n(t)$  なることから上式を微分すると、更に次式が得られる。

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} + \frac{1}{C_0} \left( G \frac{dv_n}{dt} + \frac{di_n}{dt} \right) + \frac{v_n}{L_0 C_0} = 0 \quad (2)$$

今  $g$  を 1 図(b)で測った VNLN の増加コンダクタンスとすれば、小信号動作については、

$$\frac{di_n}{dt} = \frac{di_n}{dv_n} \frac{dv_n}{dt} = g \frac{dv_n}{dt}$$

が成立つ。したがって基本の方程式は次の如く、直線性の微分方程式のように書くことが出来る。

$$\ddot{v}_n + \frac{1}{C_0} (G + g) \dot{v}_n + \frac{1}{L_0 C_0} v_n = 0 \quad (3)$$

しかし乍ら上記方程式の直線性は、一度信号の振幅が大きくなり、電圧・電流特性の正抵抗領域に入ると成立しない。その場合の発振々巾はこの系の非線形微分方程式を解くことにより求められる。しかし現在はこの問題に触れる前に上記方程式が正弦波発振を維持するための条件を求めることにする。

先づ方程式 (3) を解くに当り

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} (G + g)$$

とおけば、次式が得られる。

$$\ddot{v}_n + 2\zeta\omega_0 \dot{v}_n + \omega_0^2 v_n = 0 \quad (4)$$

これをラプラス変換すると、

$$v_n(s) = \frac{1}{s^2 + 2s\zeta\omega_0 + \omega_0^2} \{ 2\zeta\omega_0 v_n(0) + \dot{v}_n(0) \} \\ = \frac{1}{(s + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)} \{ 2\zeta\omega_0 v_n(0) + \dot{v}_n(0) \}$$

したがってラプラス逆変換から

$$v_n(t) = \frac{2\zeta\omega_0 v_n(0) + \dot{v}_n(0)}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad (5)$$

さて発振々巾が増大するためには

$$\zeta < 0$$

したがって

$$G < -g \quad (6)$$

(6) 式は唯負荷が特性の正抵抗領域と負性コンダクタンス

ス領域の双方と交さする時にのみ満足される。若し特性曲線の負性コンダクタンス領域内の交点が1この場合には、その発振々巾は時間と共に増加しないで減少する。次に考えられる制限は(5)式の根号の中に存在し、特性が振動的なことから

$$1 - \zeta^2 > 0$$

$$\text{したがって } \frac{4C_0}{L_0} > (G + g)^2 \quad (7)$$

(7)式なる不等式の境界は二つの直線であって、次式が満足される。

$$-G + \sqrt{\frac{4C_0}{L_0}} > g > -G - \sqrt{\frac{4C_0}{L_0}} \quad (8)$$

これを図示すれば図2のようになる。

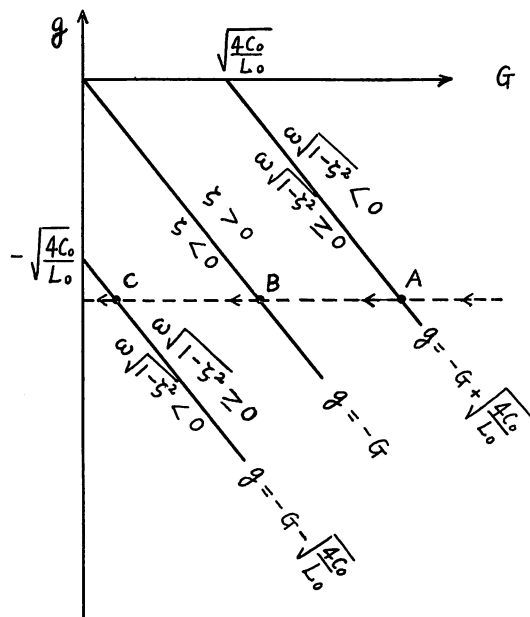


図2 回路の動作領域

図に於て  $g = -G$  線の下方の領域では自励振動が発生し、この線と  $g = -G - \sqrt{\frac{4C_0}{L_0}}$  の線との間のせまい領域が正弦波発振の領域に相当する。又  $G = -g$  は持続発振の限界であり、図1(b)の電圧・電流特性におけるQ点でこの場合外部コンダクタンスは切線になり、同調回路の正のコンダクタンスが打消され、純虚数の極は、

$$S_{1,2} = \pm j\omega_0$$

におかれることになる。図2から  $\sqrt{L_0/C_0}$  が増加すれば振動領域の巾が狭くなることがわかる。又、系の可能な発振の様式はその系の極の移動を考察することによっても求められる。即ち今図2の点線に沿って考えること

とし、最初回路が電力を消費することから二つの極は実軸上に存在する。Gの減少を考慮すると、一致して居た極は円弧に沿い分離する。これは図2及び図3のA点に相当する。  $G = -g$  の場合には極は虚軸上にある。更にGが減少すると指数函数的に出力は増加し、この場合の極は右半面に移動する。最終的には極は再び一致し(図2のC点)正の実軸に沿って分離することになる。図3は今述べた経過を説明するものである。

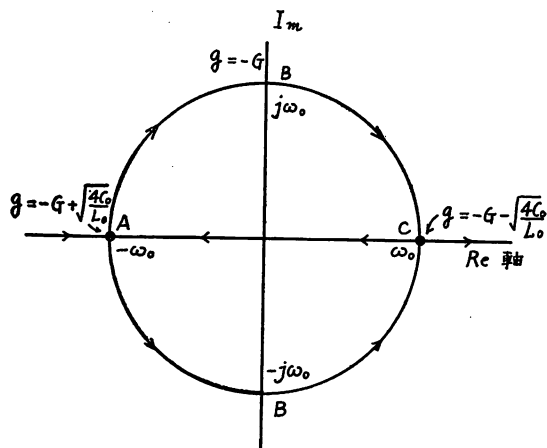


図3.  $g$  の函数としての極の移動

### 3. 周波数と振巾に関する一次近似の解について

前に求めた基本的な電圧制御形の負性抵抗発振器に関する(2)式から

$$\ddot{v}_n + \frac{G}{C_0} \left(1 + \frac{1}{G} \frac{d^2 i_n}{d v_n^2}\right) \dot{v}_n + \frac{1}{L_0 C_0} v_n = 0 \quad (9)$$

よって上式は

$$\ddot{v} + \varepsilon f(v) \dot{v} + \omega_0^2 v = 0$$

とおくことが出来る。これは Van der Pol の非線形微分方程式の形である。今  $f(v)$  を零と仮定すると、Van der Pol の方程式は、簡単な振動の方程式になる。即ち

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v = 0$$

となりこの解は

$$v = E \sin(\omega t + \varphi)$$

で与えられる。ただし  $E = \sqrt{\{v(0)\}^2 + \left\{\frac{v'(0)}{\omega}\right\}^2}$ ,

$$\varphi = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega v(0)}{v'(0)} \right\}$$

現在或任意の単一サイクルについて、大信号動作は等価な線形回路で表示し、各サイクルに生ずる変化を無視するものとする。

(9)式に対する解を

$$v_n = E(t) \sin \omega t$$

とし、(9)式にこれを代入してまとめると、

$$\left[ \frac{d^2 E}{dt^2} - \omega^2 E + \frac{E}{L_0 C_0} + \frac{G}{C_0} \left( 1 + \frac{1}{G} \frac{di_n}{dv_n} \right) \frac{dE}{dt} \right] \sin \omega t + \left[ 2\omega \frac{dE}{dt} + \omega E \frac{G}{C_0} \left( 1 + \frac{1}{G} \frac{di_n}{dv_n} \right) \right] \cos \omega t = 0 \quad (10)$$

ここで E(t) を定常状態に於ては、正弦波振動の各周期にわたり常数であると仮定することによって、

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = 0$$

したがって(10)は次の形になる。

$$\left( -\omega^2 + \frac{1}{L_0 C_0} \right) \sin \omega t + \frac{\omega G}{C_0} \left( 1 + \frac{1}{G} \frac{di_n}{dv_n} \right) \times \cos \omega t = 0 \quad (11)$$

平均としての特性を求めるために、 $\sin \omega t$  をかけて一周期についての積分を求めると、

$$\int_0^{2\pi} \left( -\omega^2 + \frac{1}{L_0 C_0} \right) \sin^2 \omega t d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{\omega G}{C_0} \left( 1 + \frac{1}{G} \frac{di_n}{dv_n} \right) \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) = 0$$

上記積分に於て第二項の  $\sin \omega t \cos \omega t$  の係数が非線形要素を与えるが、これを正弦波の歪みを最小にする為に一周期にわたり常数であると考えることにより、今考えている第二項は零になる。よって近似的な発振周波数は第一項の積分係数を零とおくことにより求められる。それは同調回路の共振周波数である。即ち

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

再び基本の回路方程式に戻って E(t) を検討する。正弦解を仮定することにより (2) 式は次のようになる。

$$-\frac{di_n}{dt} = \left[ C_0 \frac{d^2 E}{dt^2} + G \frac{dE}{dt} + \left( \frac{1}{L_0} - \omega^2 C_0 \right) E \right] \times \sin \omega t + \left( 2\omega C_0 \frac{dE}{dt} + \omega G E \right) \cos \omega t \quad (12)$$

一周期にわたりすべての係数を近似的に常数と仮定すると、 $\cos \omega t$  をかけて積分することにより次式が得られる。

$$-\omega \int_0^{2\pi} \frac{di_n}{d(\omega t)} \cos \omega t d(\omega t) = -\omega \int_0^{2\pi} i_n \sin \omega t d(\omega t) \quad (13)$$

(13)式の右辺はVNLRの中を流れる電流の基本成分のピーク値に比例することから、上式は次のようになる。

$$-\omega \pi I_{1m} = \left( 2\omega C_0 \frac{dE}{dt} + \omega G E \right) \pi$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2C_0} (I_{1m} + G E) \quad (14)$$

発振が平衡していることから  $dE/dt=0$  とおき

$$I_{1m} = -GE \quad (15)$$

上式を満足する振巾は記述函数をプロットすることにより画かれ、この場合の安定条件は次式で与えられる。

$$-\frac{dI}{dE} + G > 0 \quad (16)$$

即ち電圧変動  $\Delta E$  が正で瞬間的に出力が増加すると、 $dE/dt$  はEが時間と共に減少して安定な振巾へ戻るために負でなければならないからである。同時に又上式は安定点では全増加コンダクタンスが正でなければならないことを意味している。

#### 4. 特性とその解析について

##### 4.1 記述函数について

実験により求めた三極真空管のVNLR特性を図4に示す。この特性に於て最初負性抵抗領域の中心P点にバイアスをかけ、その電圧、電流をそれぞれ図から  $V_0 = 64$  V,  $I_0 = 2$  mAとよみとり、実際の特性を点線のように折線グラフで近似する事とし、P点について測定した曲線

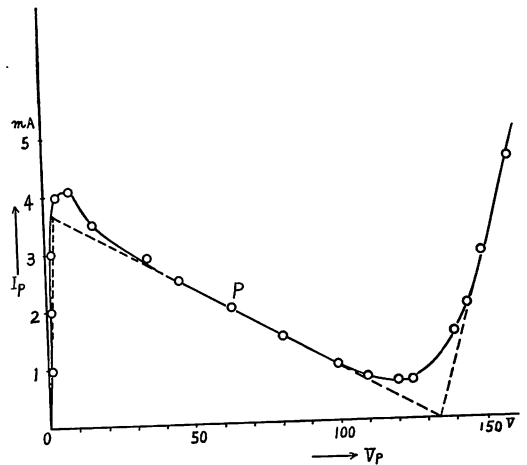


図4. 実験で求めた電圧・電流特性

上の三点  $(-20V, 0.5mA)$ ,  $(+20V, 0.5mA)$ ,  $(-10V, 0.2mA)$  を求めて近似的多項式をつくると

$$i_1 = -0.0489v - 0.000163v^2 + 0.00001087v^3 \text{ ma と}$$

なる。これをもととしてコンダクタンス記述函数を求めると、

$$G_{n1} = -0.0489 + 0.002 E_1^2 \text{ m}\Omega$$

を得る。これが図5の  $G_{n1}$  曲線である。例えば発振回路のコンダクタンスが  $3 \times 10^{-2} \text{ m}\Omega$  の時、回路は3Vの振巾で発振することがこれからわかり今の場合チョークコイル (1.73H, 直流抵抗223 $\Omega$ , 分布容量は約500P・F)

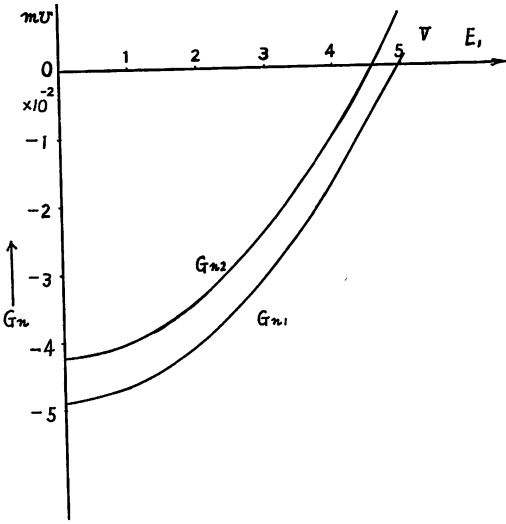


図 5. 記述函数

に対して並列接続の容量を変えて実験をしたが、定性的な傾向は理論とよく一致した。次に動作点を特性曲線上  $V_o = 54V, I_o = 2.2mA$  に移し、この場合の近似多項式を求めると

$$i_2 = -0.042v - 0.00049v^2 + 0.0000109v^3 \text{ ma}$$

したがって今の場合、コンダクタンス記述函数は次式のようなになる。

$$G_{n2} = -0.042 + 0.002E_1^2 \text{ mU}$$

これが曲線  $G_{n2}$  として同じく図 5 に画いてある。更に極端な場合であるが、 $V_o = 5V, I_o = 3mA$  の正抵抗領域に動作点を移動してこの場合の近似多項式

$$i_3 = 0.372v - 0.021v^2 + 0.000124v^3 \text{ ma}$$

を求め、この式から得られるコンダクタンス記述函数を

$$G_{n3} = 0.372 - 0.021E_1 + 0.000124E_1^2 \text{ mU}$$

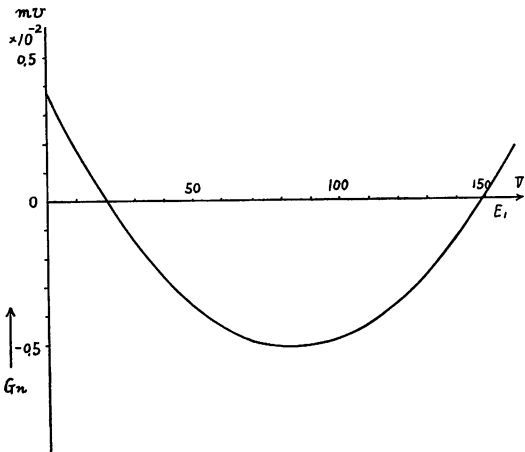


図 6.  $G_{n3}$  を示す記述函数

とすれば、このグラフは図 6 のようになる。又前に求めた  $i_1$  及び  $i_3$  の  $E_1$  に対する関係をグラフに示せば、それぞれ図 7, 図 8 のようになりいづれも定性的な傾向は理論とよく合致する。

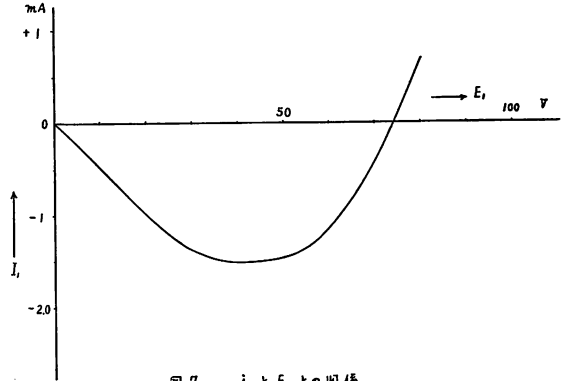


図 7.  $i_1$  と  $E_1$  との関係

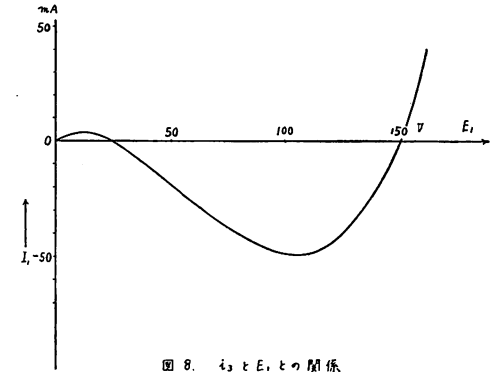


図 8.  $i_3$  と  $E_1$  との関係

#### 4.2 位相面による解析について

二階の autonomous な系は最も一般的には二つの一階の非線形微分方程式で表わされるが、現在考慮しているような一つの二階の微分方程式  $F(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$  で表わされることも多い。この事と関連して位相面を求めるには今述べた微分方程式から解析的に求める方法と、図式的に求める方法との二つがある。今の場合前者により之を或程度解析し、作図は後者によった。

先づ便利な出発点として二次の非線形微分方程式を考える。即ち

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{17}$$

二つの初期条件が必要となるが、普通  $t=0$  における位置と  $t=0$  における速度が定められる。 $b=0$  は最も簡単な場合であって、この場合の解は、

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{18}$$

$$y = \dot{x} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (19)$$

与えられ、(18)式と(19)式とは楕円の変数方程式であって、以上の式からtを除去すると、次式が得られる。

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{\omega_0^2 A^2} = 1 \quad (20)$$

又この式から速度を  $\dot{x}/\omega_0$  で標準化すると半径Aの円群が得られ、与えられた初期条件から特定の円が定まることになる。又軌道の回転は原点に関して常に時計方向であり、且つ系の平衡の保たれているところでは  $\dot{x}$  と  $\ddot{x}$  とは零になる。それ故この例では原点の特異点になる。以上のことをグラフで示せば、図9(a)、(b)のようになる。

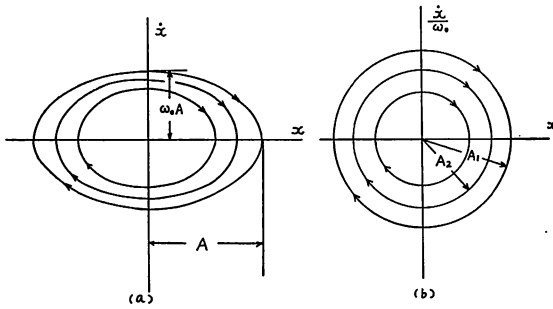


図9. 位相面の軌道

再び(17)式に立帰りに系に若しまたつ或いは減衰が含まれているとすれば  $b > 0$  であって、(17)式は二つの可能な解をもつ。

(1) 減衰振動波

(17)式を  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  と書き改めて解を求めると、

$$x = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega t \quad (21)$$

ここで  $A = \frac{2\zeta\omega_0 x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}}$ ,  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

この場合特性方程式の根は、

$$S_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$$

なる共役複素数である。

(21)式に基づき基本回路についての軌道を次に述べる等傾斜線法によって作図すると図10のようになる。この場合(25)式に於て  $\omega_0^2 = 6$ ,  $b = \frac{1}{2}$  とおき、且つ初期条件は  $\dot{x} = 6$ ,  $x = -4$  として作図した。これは実験値をもととして画いたもので数式の取扱いについては 4.4 Liénard 図についてを参照されたい。

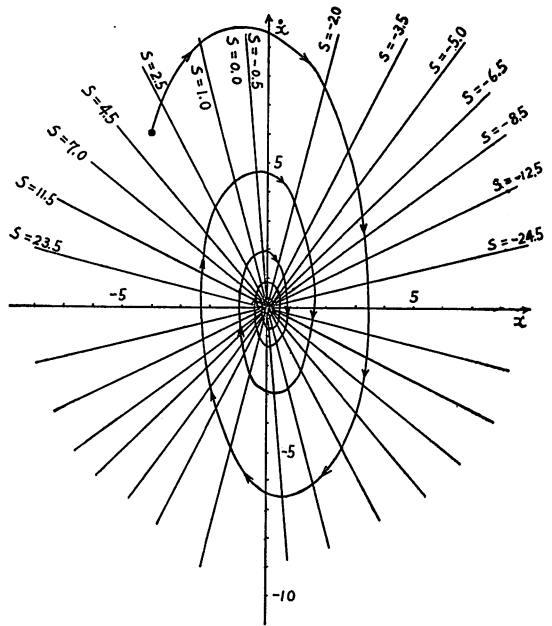


図10. 減衰振動波の位相面軌道

即ち、 $\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C_0} = \frac{1}{0.1[\mu f] \times 1.73[H]} \approx 6 \times 10^6$

$$b = \epsilon f(v) = \frac{1}{C_0} \left( G + \frac{d i_n}{d v_n} \right)$$

$$= \frac{1}{0.1[\mu f]} \left( \frac{1}{80[k\Omega]} + \frac{1}{25[k\Omega]} \right) = \frac{21}{4 \times 10^{-2}} \approx 500$$

$$\therefore \ddot{x} + 500\dot{x} + 6 \times 10^6 x = 0$$

この式を位相面に応用するについて  $\alpha = \frac{dr}{dt} = 10^3$  とおいて、数式変形を行うことにする。

このようにすると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \alpha \frac{dx}{dr} = 10^3 \frac{dx}{dr}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2x}{dr^2} = 10^6 \frac{d^2x}{dr^2}$$

よって与式は次の如くなる。

$$10^6 \frac{d^2x}{dr^2} + 5 \times 10^6 \frac{dx}{dr} + 6 \times 10^6 x = 0$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dr^2} + 0.5 \frac{dx}{dr} + 6x = 0$$

したがって位相平面を次の如く画くことが出来る。即ち

$$y = -\frac{6}{s + \frac{1}{2}} x = -\frac{12}{2s + 1} x$$

その軌道は原点についての対数スパイラルでそのプロセスは位相平面上では、解の進行について一度それを取りまいている。このスパイラルは結局原点に近づくから、原点が特異点であって、安定な渦状点とよばれる。した

がってまた Lyapunov の意味で安定である。

### (2) 減衰する非振動波

やはり  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  から出発することとし、上式をラプラス変換して

$$\bar{x}(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_0)x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$x(t)$  の性質は分母の二つの特性根である零点によって定まるが、今の場合次のようになる。

即ち零点は、

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}, \text{ ただし } \zeta > 1$$

とする。したがって

$$x(t) = \frac{2\zeta\omega_0 x(0) + \dot{x}(0)}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sinh \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} t + \frac{x(0)}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \left\{ \omega_0 (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-\omega_0 (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) t} - \omega_0 (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) e^{-\omega_0 (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) t} \right\} \quad (22)$$

この形は又

$$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (23)$$

とおくことも出来る。この場合は

$$\alpha_1 = \omega_0 (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}), \quad \alpha_2 = \omega_0 (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

その軌道は  $x$  軸を一度切るのみで原点をつつむことは

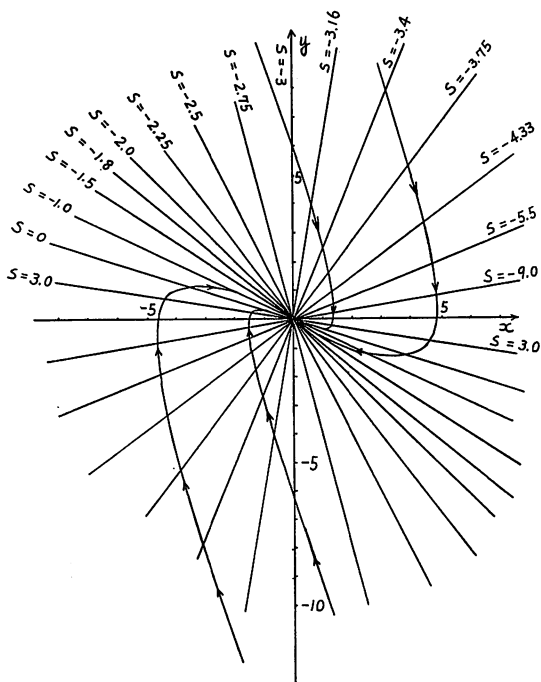


図 11. 減衰する非振動波の位相面軌道

ない。そしてすべての経路は原点に収束するから特異点は安定な結節点であり、Lyapunov の意味で安定な平衡状態に対応している。(22)或いは(23)式に基づき基本回路についての位相軌道を求めたものを図11に示す。これも実験で得た値をもととし  $\omega_0 = 1$ ,  $b = 3$  として作図したものである。

### 4.3 等傾斜線法による作図について

位相面における微分方程式の解を示す軌道は直接、等傾斜線法によって方程式からプロット出来る。これは非線形系の研究に最も有用な方法であって4.2で述べた解析的な方法が使えなくても経路の傾斜を調べることによって、図式的に位相面表示が可能となる。

今、(17)式で  $y = \frac{dx}{dt}$  とおくと、

$$\frac{dy}{dt} = -by - \omega_0^2 x$$

$y$  で割ると

$$S = \frac{dy}{dx} = -b - \omega_0^2 \frac{x}{y} \quad (24)$$

このようにしてすべての点は原点を通る直線上で同一の傾斜  $S$  をもち次式を満足する。

$$y = -\frac{\omega_0^2}{S+b} x \quad (25)$$

一度等傾斜線法で或角度の短い線分を引けばそれと同一の傾斜の短線がそれぞれに平行に引かれることになり、その各々が曲線を形成することとなる。したがって初期

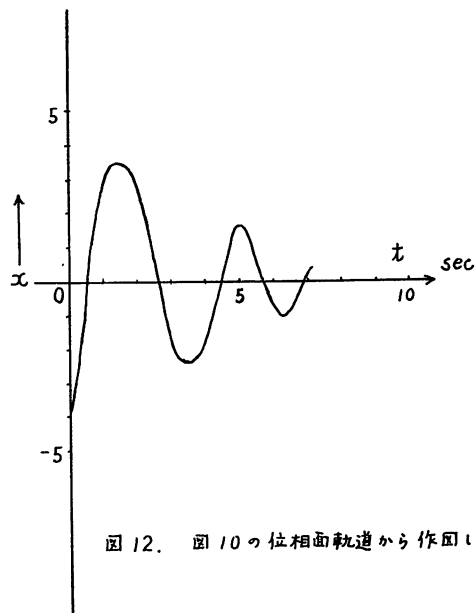


図 12. 図 10 の位相面軌道から作図した波形

条件が与えられると平均の傾斜をとることによって、次々に点を求めることが出来、軌道を決定することが可能になる。4・2 で説明の為に使用したグラフは今述べた方法により画いた。

また位相平面上の軌道は時間と共に変化する等価信号波に変換することが出来る。即ち位相平面上の或任意点に於て得られる傾斜と位置とから、時間函数の線分を作図する事が出来る。今述べたようにして軌道に沿って経路を作図すると、それが発生する波形の概形を与える。図12はこのようにして画いたものであって、位相軌道の初期値を作図の出発点とした。又この作図に使用した時間目盛は正確ではない。今の場合は主として波形を観測するという立場で作図したに過ぎない。

#### 4・4 Liénard 図について

Van der Pol の非線形微分方程式を、位相平面による解を求めるために、次のように取扱かう。先づ基本方程式

$$\ddot{v} + \varepsilon f(v)\dot{v} + \omega_0^2 v = 0$$

を  $\omega_0^2$  で割って整理すると次式が得られる。

$$\frac{d^2 v}{d(\omega_0 t)^2} + \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(v) \frac{dv}{d(\omega_0 t)} + v = 0 \quad (26)$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{d(\omega_0 t)} \quad \text{とおけば}$$

$$\ddot{v} + \varepsilon' f(v) \dot{v} + v = 0 \quad (27)$$

したがって位相面上の各点における軌道の傾斜は次式で与えられる。

$$S = \frac{dv}{d\dot{v}} = -\frac{\varepsilon' f(v) \dot{v} + v}{\dot{v}} \quad (28)$$

$f(v)$  は与えられた電圧・電流特性からその値を求める事が出来るから、等傾斜線は各個々の点をプロットすれば作図出来る。しかし今は A. Liénard により発展された作図について述べる。線形変換をすることによって問題は位相軌道への法線を求めることになる。さて変換の方法は次のようにする。

$$Z = \dot{v} + \varepsilon' F(v) \quad (29)$$

$$\text{ここで } \int f(v) dv = F(v)$$

$z$  を  $v$  について微分し(28)と別の表示をすると

$$S = \frac{dv}{d\dot{v}} = \frac{dZ}{d\dot{v}} - \varepsilon' f(v)$$

上式の  $S$  を(28)式に代入すると

$$\frac{dZ}{d\dot{v}} = -\frac{v}{\dot{v}}$$

したがって軌道の傾斜は

$$\frac{dZ}{d\dot{v}} = -\frac{v}{Z - \varepsilon' F(v)} \quad (30)$$

よって軌道に対する法線の傾斜は次式で与えられる。

$$N = -\frac{dv}{dZ} = \frac{Z - \varepsilon' F(v)}{v} \quad (31)$$

軌道を作図するためには  $\varepsilon' F(v)$  の値を求めねばならない。図1の基本回路から

$$F(v) = \int f(v) dv = \int \left( G + \frac{di}{dv} \right) dv$$

$$\therefore F(v) = Gv + i = i - (-Gv) \quad (32)$$

ここで  $v$  と  $i$  とは電圧・電流特性上の Q 点から測ったものであり、 $-Gv$  は Q 点を通る負荷線のコンダクタンスである。又(32)式からわかるように  $F(v)$  は負荷線と電圧・電流特性との間の電流差を示している。又  $\varepsilon'$  はタンク回路の設計上定まる係数であって一つのパラメータと考えられる。即ち

$$\varepsilon' = \frac{1}{\omega_0 C_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (33)$$

回路に於ける非線形の度合は、 $\varepsilon'$  により左右される。したがって  $\varepsilon'$  が大きければ大きな非線形をもつ事になり、当然正弦波発振器に対しては可能なる範囲に於て  $\frac{L_0}{C_0}$  は小さくすべきであり、これは図2及び図3からも理解されるところである。

Liénard 図の作図の方法は最初に法線を求め、それによって軌道を(31)式により画く。本実験に於てはこれまですすめた理論にしたがって  $\varepsilon' F(v)$  の非線形を先づプロットし、Liénard 平面上任意点を定めてその点から  $\varepsilon' F(v)$  に垂線を下し、或  $z_1$ ,  $v_1$  に対して  $z_1 - \varepsilon' F(v_1)$  を求めるという具合に、円弧を作図し時計方向へ軌道が一つの閉じた経路に収束するまで続けた。図13, 14, 15はこのようにして得られたリミットサイクルであるが、この中で図13は実験で求めた電圧・電流特性に於て動作点を64 [V], 2 [mA] とし、 $\varepsilon' = 4,000$ ,  $R = 5000$  [ $\Omega$ ] とした場合の Liénard 軌道と位相面リミットサイクルを画いたものである。又図14は動作点を100 [V], 1.0 [mA],  $\varepsilon' = 4,000$ ,  $R = 100$  [k $\Omega$ ] とした場合の安定な Liénard 平面を画いたものであり、同じく図15は図14に於ける  $\varepsilon' F(v)$  を折線近似で求めた場合のグラフであって、不安定リミットサイクルはいづれにもあらわれなかったが、全体としての定性的な傾向は理論とよく一致している。

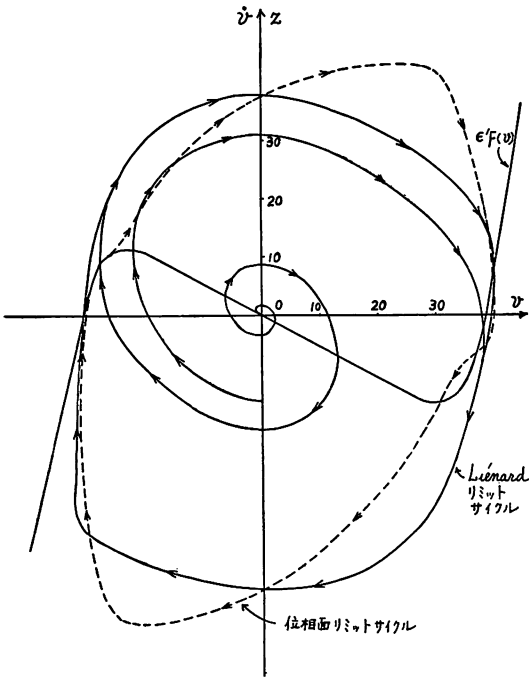


図 13. Liénard リミットサイクルと位相面リミットサイクル

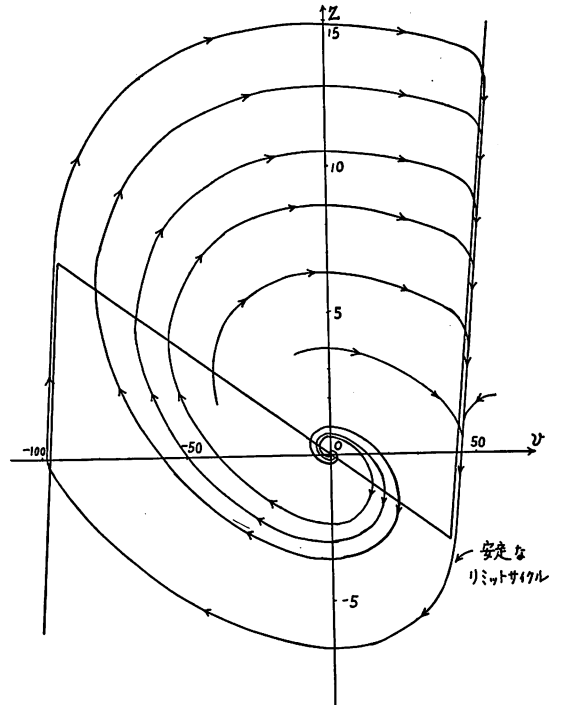


図 15. 図 14 の特性を折線近似とした場合の Liénard 平面

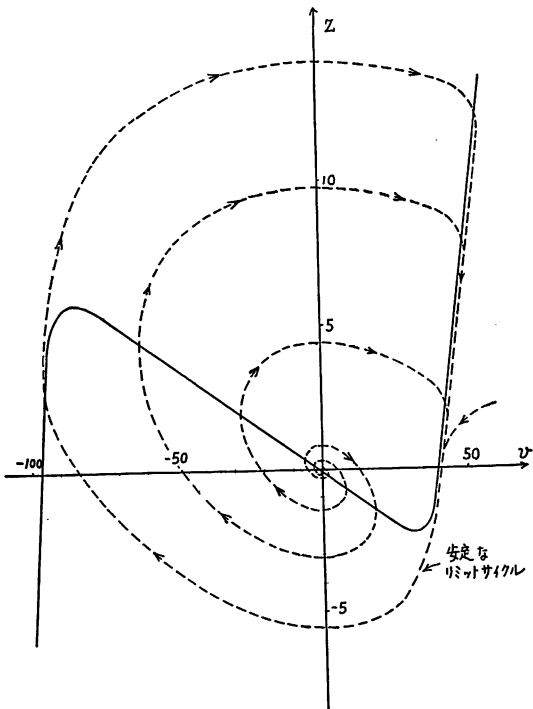


図 14. 動点を特性曲線の中心から移動した場合の Liénard 平面

### 5. むすび

ここでは電圧制御形負性抵抗を含む非線形の発振回路を、数値研究の立場から周波数と振幅に関する一次の近似解を求めそれをグラフによって示した。次には主として非線形の微分方程式をもととして、位相面による解析を行った。これらの結果は実験結果と定性的な範囲で極めてよく一致した。負性抵抗にはダイナトロン、エサキダイオードの如き電圧制御形負性抵抗の他に、電流制御形負性抵抗として、PNPNダイオード、二重ベースダイオード、なだれトランジスタがあり当然かかる電流制御形素子についても実験解析すべきであったが予想に反して本文のように内容が極めて不完全なままで終わった。もっとつっこまなければならない課題が残されているのであるが、大方のお許しを願うと共に本文が多少なりともこの方面の研究分野にお役に立ち得れば幸いである。

### 文 献

- (1) イ・エム・カプチンスキー著、関根智明訳：“電子回路と振動論” 東京図書株式会社 (1962)
- (2) 柳沢・八木：“負性抵抗を含む回路網理論” 信学誌



- 47, 4, P 478 (昭和39—04)
- (3) 家入: “エサキダイオードを用いた発振回路および周波数変換回路” 同上 P 486
- (4) 増淵著: “最適制御入門” オーム社 (昭39)
- (5) 佐藤・高橋: “トンネルダイオードを含む発振回路の解析”, 非直線理論研資 (1966—07)
- (6) 福井著: “エサキ・ダイオード” オーム社 (昭38)
- (7) 木村・真野: “エサキダイオード発振器の解析と実験的検討” 信学誌 48, 5, P 845 (昭40—05)
- (8) 斎藤・高木・真野: “トランジスタ発振器における間歇発振現象の解析” 非直線理論研資 (1965—11)
- (9) Thaler-Brown: “Analysis and Design of Feed-back control Systems” Mc Graw-Hill Book Company, Inc.
- (10) F.H.Raven: “Automatic Control Engineering” 同上
- (11) L.Strauss: “Wave Generation and Shaping” 同上
- (12) 堪木著: “非線形振動論” 応用力学講座 8, 共立出版 (昭和40)
- (13) エヌ・エヌ・ボゴリユーポフ, ユー・ア・ミトロポリスキー共著, 益子正教訳: “非線型振動論” ——漸近的方法——, 共立出版 (昭和40)
-