制御系の感度解析（第1報）

柳原昌輝

Sensitivity analysis in Control Systems（1st Report）

Masateru YANAGIWARA

（昭和48年10月31日受理）

1 まえがき

サーボ機構とは，〝物体の位置，方向，姿勢等を制御される量とし，系の目標値の任意の変化に追従するように構成された制御系″である。

この系において，パラメータの変動に対して伝達特性の変動（無ければ理想的）ができるだけおさえることができるような種々の方法が発表されている。

この中，K．Bode氏は，パラメータの変動に伴う系全体の特性変動の程度をパラメータ感度で表わしている。

この理論を制御系の特性設計をする際に取り入れ，パラメータ変動による系全体の特性変動をある許容範囲内におさめようとする方法は，本誌4，5，6号で述べてある。

この設計法をもとに，Rajko TomovicとMiomir Vukobratovicによる0感度（zero sensitivity）の理論を用いて，直列補償を施したサーボ機構における1パラメータが変動するとき，その伝達特性が全く変動しないような系となるように修正（補償）をサーボ機構に施してみた。

そのような操作（修正）を行なうことにより，実際に，系全体の伝達特性が変動（乱れ）をきたすことなく，かつ，パラメータ変動時の影響の有無についてもアナログ計算機（TOSAC400）で確かめ*，感度及び細部のディジタル量については，ディジタル計算機（NEAC TYPER，FACOM 270－20他）で計算**した。

パラメータを時定数とした場合についてもPole変動と同様に検討を加えていく。

紙面の関係上，本文においては，動的系と感度理論に関することを主に述べ，本理論を用いた感度解析及び例題については，第2報で述べることにする。

*）パラメータ変動前，変動後の状態をグラフでみる。

**）感度0の状態を精度が高い状態で確める。

2 動的システムと感度理論

2—1 不変性（Invariance）

今，時間の関数である動的システムが次の微分方程式で表わされるとする。

$$x_i=\phi_i(x_i,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ t,\ f_m(t))$$

$$x_i(0)=x_i-x_i^0\ (i=1,\ \cdots\cdots n)$$

$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots x_n$：システムの座標

$f_m(t)$：外乱

o $x_k(t)$の不変性

この座標が$f_m(t)$に独立していること。

o 絶対不変性（absolute invariance）

すべての瞬間において$x_k(t)$が$f_m(t)$から独立していること。

o 精度に対する不変性

$x_k(t)$がほとんど$f_m(t)$に独立であること。

Φ_iがx_iの線形関数の時，重ねの理によると$x_k(t)$は

$$x_k(t)=x_{ks}(t)+x_{kp}(t) \qquad 2-2$$

のように表わされる。

$x_{ks}(t)$：自由解

$x_{kp}(t)$：拘束解

ここで$x_{kp}(t)$の不変性ということが考えられる。このことを考えると，不変性とは，〝$x_{kp}(t)$が，ある時間$t=T$においてのみ，もしくは，0～Tのすべての時間においても$f_m(t)$に関して独立であること″と表わすこともできる。前者を弱不変性（weak invariance），後者を強不変性（strong invariance）という。

この不変性を取扱ったものとして，Rozonoerの研究があるが，ここでは詳細な説明は省き，彼の研究で導びかれた非線型システムの不変性に関する基本定理だけを述べておくことにする。

〔定理〕

関数J(x)の完全不変性(complete invariance)の必要十分条件は，関数$J_1(x, u)$，……，$J_{n-1}(x, u)$がどんなxに対しても独立であること。

2—2 パラメータ不変性と0感度 (Parametric Invariance and Zero Sensitivity)

変動（乱された動作）の状態は次式で表わされる。

$$\Delta x = U(x, p)\Delta p + \omega(\Delta p) \quad 2\text{—}3$$

Δp：パラメータ変動

$U(x, p)$：点(x, p)における感度演算子

$\omega(\Delta p)$：Δpにおけるより高次な項

パラメータ不変性，$\Delta x(t) \equiv 0$はシステム特性に厳しい制約を課し，この特性がシステムパラメータの任意の大きな変化に対して認められる場合，実際の利益は全く無い。

0感度（Zero Sensitivity）は次の様に定義されるとより実現性がでてくる。ということは，パラメータが何らかの影響で変動した時，特性座標の線型項が不変であることと定義された時である。

乱された動作の線型部分を次式のようにする。

$$\delta x = U(x, p)\Delta p \quad 2\text{—}4$$

この式は，任意のΔpに対して感度演算子$U(x, p)$が同時に0であることを意味している。

システム動作が状態ベクトル$x = \{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$と，パラメータベクトル$p = \{p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n\}$で表わされるとき，感度演算子は次のような行列となる。

$$U = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right] \quad 2\text{—}5$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n \quad j = 1, 2, \cdots\cdots m)$$

0感度U＝0を得るあらゆるやり方は次の2つの物理的原則に基く。

(1) 無限大な利得を持つループ内にかく乱要素を含むこと。

(2) 並列なsignal pathによる乱れの補整

要するに基礎になる操作は与えられた構造に対して，希望するパラメータについて0感度に保つように付け加えられたpathの移動関数の値を選ぶための，簡単な法則を立てることになる。

その問題の解は0感度条件を使うことにより得ることができる。

また，0感度の構造条件はgraph理論を用いて示すことができる。システムは，任意の構造の線型グラフで示される。変動パラメータはbranch G′で示される。

その伝達（transmittance）は次のMasonの方程式で与えられる。

$$T = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad 2\text{—}6$$

Δ：graphの行列式

Δ_i：graphの小行列

P_i：direct path

n：direct pathの数

また次式で示されるT_iをgraphの部分伝達という。

$$T_i = P_i \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad 2\text{—}7$$

また次式のβをi番目の伝達（transmittance）のweightという。

$$\beta = \frac{P_i \Delta_i}{\Sigma P_i \Delta_i} \quad 2\text{—}8$$

ただし$\Sigma \beta_i = 1$

グラフの感度S_m^Tはtransmittance Tの対数感度（logarithmic sensitivity）と定義される。

全感度は各成分の感度の総和に等しいのでグラフの感度は次のように表わすことができる。

$$S_m^T = \sum_i \beta_i S_m^{Ti} \quad 2\text{—}9$$

これらから，パラメータ不変性条件は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i S_m^{Ti} \equiv 0 \quad 2\text{—}10$$

（2—10）式の表現は複素振動数のすべての値に対して，満足されねばならない。

i番目のdirect pathに関して，変化するbranchの3つの特別な位置にある場合，S_m^{Ti}を0にする実現性について検討する。

Position Ⅰ：変動branchがdirect path内にある場合

$$S_m^{Ti} = S_{dir} = \frac{\Delta^m}{\Delta} \quad 2\text{—}11$$

ここにおいて$\Delta \to \infty$にすると0になり，これは無限ループ利得に相当する。

Position Ⅱ：変動branchがi番目のdirect pathにも，またi番目のdirect pathに触れないどんなループにも属していない場合

$$S_m^{Ti} = S_{inv} = \frac{\Delta^m}{\Delta} - 1 \quad 2\text{—}12$$

Position Ⅲ：変動branchが少なくともi番目のdirect pathに触れないループの1つ

には含まれる場合

$$S_m^{Ti} = S_{dir} - S_{add,i} = \frac{\Delta^m}{\Delta} - \frac{\Delta_i^m}{\Delta_i}$$

2—13

行列式は $\Delta = \Delta_i + R_i$ となり，また Position Ⅲの定義から R_i は m から独立している。

したがって

$$\Delta^m = \Delta_i^m + R_i$$

$$\therefore S_m^{Ti} = \frac{\Delta_i^m + R_i}{\Delta_i + R_i} - \frac{\Delta_i^m}{\Delta_i} = \frac{(\Delta_i - \Delta_i^m) R_i}{(\Delta_i + R_i)\Delta_i} \neq 0$$

すべての S_m^{Ti} は同時に0（零）には成り得ないから，1－direct pathを持つシステムで，パラメータ不変性は成し遂げがたい。変動 branch がすべての direct path に関して同じ Position を取ると仮定すれば

$$S_m^{T1} = S_m^{T2} = \cdots\cdots = S_m^{Tn}$$

$$\therefore S_m^T = S_m^{Ti}\, \Sigma\, \beta_i = S_m^{Ti} \qquad 2\text{—}15$$

したがって条件

$$\Sigma\, \beta_i\, S_m^{Ti} \equiv 0$$

を満足することが不可能になる。

以上の事からまとめると

〔定理〕

direct path のどれにも触れない perturbed contour を含まないような graph の0感度の必要条件は

(1) direct path が少なくとも2つ存在すること。

(2) 同一でない，乱された path の position が少なくとも2つ存在すること。

これらの条件は0感度を持つ graph の構成を決定する。これらはまた，条件 $S_m^T = 0$ を満足できないシステムの除去を可能にする。

0感度の位置的な問題を一般化するために次のような仮定をする。まず1～ℓ番の direct path に対して変動 branch が Position Ⅰの場合に相当し，ℓ＋1～m番までの direct path に対しては position Ⅱ，m＋1～n番までの direct path に対しては Position Ⅲの場合に相当するものとする。

driect dipoleのtansmittanceをSdir，inverse dipole の transmittance を Sinu，付加感度subgraph の transmittance を $S_{add,i}$ で表わす。

$$S_{dir} - S_{inv} = 1$$

という関係を入れると

$$S_m^T = \sum_{i=1}^{l} \beta_i\, S_{dir} + \sum_{i=l+1}^{m} \beta_i\,(S_{dir} - 1)$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i\,(S_{dir} - S_{add,i}) \qquad 2\text{—}16$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

より

$$\sum_{i=l+1}^{m} \beta_i + \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i\, S_{add,i} = S_{dir} \qquad 2\text{—}17$$

この（2－17）式は0感度の必要十分条件となる。

いいかえると，0感度システムにおいては，position Ⅱの場合に相当する変動 branch に関する個々の transmittance の weight の総和と，Position Ⅲの場合の付加感度 subgraph の transmittanceの総和を加えたものが変動branchに入れられたdirect dipole の伝達関数に等しいことを意味している。

実際のシステムにおいては，ほとんどの場合 position Ⅲ は存在しない。

よって direct path に触れる contour を含まない graph に対して（2－17）式は次のようになる。

$$\sum_{i=l+1}^{n} \beta_i = S_{dir} \qquad 2\text{—}18$$

このことは，変動要素を含まない direct path の個々の transmittance の weight の総和は，この branch に，入れられた direct sensitivity dipole の transmittance に等しいことを表わしている。

2—3 指数感度関係
(Logarithmic Sensitivity Function)

システムの伝達関数に関する Mason の公式は

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i \Delta_i}{\Delta} \qquad 2\text{—}19$$

と表わされている。

P_i：node r から node C へ進む要素の transmittance

Δ_i：Δ の項から i を含む，または触れる loop の transmittance を含むすべての項を省いたもの

Δ とは

$$\Delta = 1 - \Sigma Li + \Sigma Li\,Lj - \Sigma Li\,Lj\,Lk + \cdots\cdots \qquad 2\text{—}20$$

と表わされている。

ΣLi：graph にある全 loop の transmittance の総和

$\Sigma Li\,Lj$：互いに触れない2つの loop のtransmittance の積の総和

また，Bode の指数感度関数は

$$S_m^T = \frac{\partial l_n T}{\partial l_n m} \qquad 2\text{—}21$$

（2－21）式に（2－19）式を代入すると

$$S_m^T = \frac{\partial l_n (\Sigma P_i \Delta i)}{\partial l_n m} - \frac{\partial l_n \Delta}{\partial l_n m} \qquad 2\text{—}22$$

ここでgraph の行列式はmに関して線型関数であるから

$$m\frac{\partial \Delta}{\partial m} = \Delta m \qquad 2\text{—}23$$

となる。

ここでΔmはΔの中mを含む項だけを残す。

したがって

$$\Delta - m\frac{\partial \Delta}{\partial m} = \Delta^m \qquad 2\text{—}24$$

Δ^m：branch mを削除したgraphの行列式

また

$$\frac{\partial l_n \Delta}{\partial l_n m} = \frac{m\partial \Delta}{\Delta \partial m} \qquad 2\text{—}25$$

（2－25）式に（2－24）を代入すると

$$\frac{\partial l_n \Delta}{\partial l_n m} = 1 - \frac{\Delta^m}{\Delta} \qquad 2\text{—}26$$

同様に

$$\frac{\partial l_n (\sum_i P_i \Delta i)}{\partial l_n m} = 1 - \frac{(\sum_i P_i \Delta i)^n}{(\sum_i P_i \Delta i)} \qquad 2\text{—}27$$

$(\Delta P_i \Delta i)^m$：graphからbranch m を除いた$\Sigma P_i \Delta i$

（2－26），（2－27）式を（2－22）式に代入すると

$$S_m^T = \frac{\Delta^m}{\Delta} - \frac{(\sum_i P_i \Delta i)^m}{(\sum_i P_i \Delta i)} \qquad 2\text{—}28$$

（2－26）式，（2－27）式は（2－22）式の第2項第1項であり，（2－28）式の第1項はloopの関数で，loopの位置関係のみで定まる。これはloopに含まれないすべてのbranchから独立している。第2項はforward path，loop，それらの位置関係の関数である。

2—4　1個のForward Path をもつGraph

（2－19）式に$i=1$を考え

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} \qquad 2\text{—}29$$

（2－21）式へ代入すれば

$$S_m^T = \frac{\partial l_n P_1}{\partial l_n m} + \frac{\partial l_n \Delta_1}{\partial l_n m} - \frac{\partial l_n \Delta}{\partial l_n m} \qquad 2\text{—}30$$

上式の第1項は

$$\frac{\partial l_n P_1}{\partial l_n m} = S_m^{P_1} = \begin{cases} 1 & (m \in P_1) \\ 0 & (m \notin P_1) \end{cases} \qquad 2\text{—}31$$

第2項は

$$\frac{\partial l_n \Delta_1}{\partial l_n m} = 1 - \frac{\Delta_1{}^m}{\Delta_1} \qquad 2\text{—}32$$

第3項は（2－27）式で与えられる。

これらの関係から（2－30）式は

$$S_m^T = \frac{\Delta^m}{\Delta} + S_m^{P_1} - \frac{\Delta_1{}^m}{\Delta_1} \qquad 2\text{—}33$$

Δ_1：graph Gからdirect path P_1を除去したgraph G_1の行列式

graph G_1は，数個のseparate subgraph G_{11}，G_{12}，……，G_{1n}により構成されていて，中1つ，例えばG_{11}がbranch mを含む。その時，graph G_1の行列式はSubgraph G_{11}，G_{12}，……，G_{1n}の行列式Δ_{11}，Δ_{12}……Δ_{1n}の積で求めることができる。

$$\therefore \quad \frac{\Delta_1{}^m}{\Delta_1} = \frac{\Delta_{11}{}^m}{\Delta_{11}} \qquad 2\text{—}34$$

3　あとがき

K-Bode氏の考えを入れたパラメータ感度については本誌4，5，6号で発表したが，このやり方については，感度をある範囲内におさえようとするものでかなり良い結果がでている。しかし許容範囲についてこの決め方に問題がある。

一方，本論文の0感度のやり方はごく最近研究され始めており，結果は興味深いものがある。

2報では，感度関数（sensitiv!ty function）について触れ，制御系の例題を解いて検討する。

終りにこの研究を進めるにあたり，終始ご指導，ご検討いただいた秋田大学片山愛介教授，渡部倫寧助教授に深謝いたします。

参考文献

Rajko Tomovic and Miomir Vukobratovic：General Sensitivity Theory

Richard C.Dorf：Modern Control Systems