熱伝導問題に対する変分法の応用

小　野　良　美

Application of calculus of variation for heat conduction problems

Yoshimi Ono

（昭和48年10月31日受理）

1. 緒　　言

時間的，空間的に変化する種々の物理量間の自然法則を数学的に記述する方法には，一般的なものとしては微分方程式による表示がある。これは現象の微視的平衡を式で表現したものであり，巨視的平衡を表わした積分方程式による表示とともに広く用いられる。一方，自然現象の中には，一定の目標あるいは原理に従って進行すると考えられるものもあり，このような場合には自然法則を極値条件で表示するほうが好都合であることが多い。現象を支配する法則がある量を極大または極小にするという条件式で表わされる場合は，通常の関数の極値問題となり，その量がある関数の積分で表わされるときには変分問題となる。微分方程式や積分方程式による表現の解析は，特に多数や非線形になると飛躍的に複雑になり，不可能の場合も少なくない。しかるに変分法を用いた場合にはこれらに対して統一的な取扱いが可能であり，現象を微分方程式で表現したとき，解析が不可能であったり，複雑，困難を伴う場合であっても，同じ未知関数に関する変分問題を想定し，そのオイラーの条件式がその微分方程式と一致するような汎関数を見い出すことによって，直接的解法の応用が可能となり，厳密解が得られない場合であっても，より精度の高い数値解を得ることができる。

力学系の場合は，その系のラグランジュ関数がわかればハミルトンの原理によって微分方程式が導き出せ，物理的意義も明らかであるが，熱伝導の問題に対しては，現象の不可逆性のために，単純，明解な指導原理を欠いている現状である。

本報告では，主として実用上の目的から，深く根本原理まで立ち入らずに，新たな汎関数を導入して熱伝導問題を変分表示し，これに直接的解法を応用して，簡単な例題に対しては厳密解を得れる方法を示した。最近のコンピューターの普及を考えて，近似計算法，とりわけ変分表示がなされたことによって，有限要素法への応用が考えられる。

2. 理　　論

閉領域Dに関して，力学におけるエネルギーに類似の2種類の量を定義する。

$$K=\frac{1}{2}\int_D c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 dv \qquad (1)$$

$$U=\frac{1}{2}\int_D \lambda\,(\nabla T)^2 dv \qquad (2)$$

(1)式を演算子 $P=d/dt$ を使って

$$K=\frac{1}{2}P\int_D c\rho T^2 dv \qquad (3)$$

と書き直す。

$K+U$ の変分をとると

$$\delta K+\delta U=p\int_D c\rho T\,\delta T dv-\int_D \nabla(\lambda\nabla T)\,\delta T dv + \int_B \lambda\nabla T\,\delta T\,\boldsymbol{n} dA \qquad (4)$$

を得る。ただしBはDの境界を表わし，$\boldsymbol{n}$ は表面にたてた法線方向ベクトル，dAは面積要素である。

よって

$$\delta K+\delta U-\int_B \lambda\nabla T\,\delta T\,\mathbf{n} dA=0 \qquad (5)$$

の条件として，熱伝導の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(c\rho T)=\nabla\cdot(\lambda\nabla T) \qquad (6)$$

が得られる。

3. 例　　題

実際的応用として，一次元の線形熱伝導の境界値問題に適用してみる。

3・1 第1種境界値問題

定数係数の熱伝導方程式

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad t>0,\ 0<x<L, \qquad (7)$$

を初期条件

$$T\,(x,\,0)=\varphi\,(x) \qquad 0<x<L, \qquad (8)$$

および境界条件

$$T(0,\ t)=T(L,\ t)=0 \qquad t>0 \tag{9}$$

のもとで解くことを考える。

試験関数$\overline{T}$を

$$\overline{T}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{10}$$

とおいてみる。

$\overline{T}$の値を(2)，(3)式のTに代入すれば，各nについて

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L \lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n^2\cos^2\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$=\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n^2\left(\frac{L}{2}\right) \tag{11}$$

$$K=\frac{1}{2}P\int_0^L c\rho\, a_n^2\sin^2\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot P\cdot c\rho\, a_n^2\left(\frac{L}{2}\right) \tag{12}$$

(5)式の計算を行なうと

$$\frac{L}{2}c\rho\cdot P\cdot a_n\delta a_n+\frac{L}{2}\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n\delta a_n$$

$$-\int_B \lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)a_n\cos\frac{n\pi}{L}x\,\delta a_n\sin\frac{n\pi}{L}x\cdot\mathbf{n}dA=0 \tag{13}$$

上式の最後の項は，境界条件(9)式によって０となるから，整理すると

$$c\rho\cdot P\cdot a_n+\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n=0 \tag{14}$$

(14)式は$a_n(t)$に関して１階の常微分方程式であるから，これを解くことができる。このとき，初期条件$T(x,\ 0)=\varphi(x)$を

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{15}$$

のようにフーリエ級数に展開すると，(14)式の解は

$$a_n=b_n e^{-\frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{16}$$

となる。

故に

$$\overline{T}=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{L}x \tag{17}$$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx \tag{18}$$

となり，(7)式を(8)，(9)式の条件のもとで変数分離法で求めた解と一致し，厳密解が得られる。

3・2 第２種境界値問題

(7)式を(8)式の初期条件と境界条件

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,\ t)=\frac{\partial T}{\partial x}(L,\ t)=0 \quad t>0 \tag{19}$$

のもとで解くことを考える。

この場合は試験関数$\overline{T}$を

$$\overline{T}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(t)\cos\frac{n\pi}{L}x \tag{20}$$

とおいてみる。

前題と同様に

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L \lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n^2\sin^2\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$=\frac{1}{2}\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n^2\left(\frac{L}{2}\right) \tag{21}$$

$$K=\frac{1}{2}P\int_0^L c\rho\, C_n^2\cos^2\frac{n\pi}{L}xdx$$

$$=\frac{1}{2}P\cdot c\rho\, C_n^2\left(\frac{L}{2}\right) \tag{22}$$

(5)式の計算を行なうと

$$\frac{L}{2}c\rho\cdot P\cdot C_n\delta C_n+\frac{L}{2}\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n\delta C_n$$

$$-\int_B \lambda\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\delta\overline{T}\,\mathbf{n}dA=0 \tag{23}$$

最後の項は，境界条件(19)式より０となるから

$$c\rho\cdot P\cdot C_n+\lambda\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n=0 \tag{24}$$

初期条件をこの場合は

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cos\frac{n\pi}{L}x \tag{25}$$

のようにフーリエ級数に展開し，(24)式の計算を行なうと

$$C_n=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \tag{26}$$

となり，結局

$$\overline{T}=\sum_{n=0}^{\infty} d_n e^{-\frac{\lambda}{c\rho}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{L}x \tag{27}$$

$$d_0=\frac{1}{L}\int_0^L \varphi(x)\,dx \tag{28}$$

$$d_n=\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \tag{29}$$

が得られ，これも厳密解と一致する。

4. 摘　　要

以上のように簡単な例題については厳密解が得られることを示した。２次元以上やその他の問題については(5)式の境界に関する項が定まるように，試験関数を仮定する必要がある。またこの方法は(6)式で明らかなように，高温度における熱伝導のような，係数が非線形の場合にも適用できる可能性がある。ただし(1)式から(3)式への書き換えでもわかるように，変分に際して拘束条件が必要であるし，解も変数分離できるものでなければならな

い。これらについては有限要素法のアルゴリズムとともに今後の研究課題としたい。

参 考 文 献

1) 川下，熱伝導論，第2版，オーム社
2) 川井，機械前刷（705回），1962
3) 林，村，変分法，コロナ社
4) クーラン・ヒルベルト，数理物理学の方法（邦訳），東京図書
5) シュワルツ，物理数学の方法（邦訳），岩波
6) 皆川，応用ベクルト解析，朝倉
7) 黒田，応用偏微分方程式，朝倉
8) 鷲津，エネルギ原理入門，培風館
9) 藤野，熱伝導と熱応力，培風館
10) 末岡，級数および直交函数系，コロナ社