流れによる波の変形に関して

榎　　国　　夫

On the deformation of wave due to flow

Kunio Enoki

(昭和47年11月10日受理)

1 緒　　言

一般に，津波やうねり，周期の長い風波等が流れのない領域から，流れのある領域に侵入すると，波高が増幅したり，逆に減衰したり，又砕波する事もあり，複雑な様相を呈する。こうした現象の実例としては，河口に侵入する津波や風波等が考えられ，これらの海岸構造物に与える影響は大きい。そこで，海岸保全の点からも，この流れと波が共に存在する場，すなわち，共存系における波の挙動を正確に把握しておかねばならない。

流れに侵入する波の研究は，我が国においても，海外においても，最近2～3の新しい論文が発表され，あらためてこの研究に関する重要性が認識されてきた。これらの理論の適応性を従来の実験と比較検討し，解析を試みた。実験に使用された波は，弧立波である。と云うのは，津波，高潮，うねり等波長の長い波は弧立波に近似出来るからである。

2 孤　立　波

正弦波の解析から，波によって伝達される energy のもつ速度 Gw は波の群速度 Cg に等しい。energy 伝達の絶体速度 Gg は，相対速度と波速 V の代数学的な和に等しい。それ故に

$$Gg=Gw+V=Cg+V$$

今，$Cg=-V$ であるなら energy は上流へ伝達されず，砕波によって消散するであろう。波が静水領域から V なる速度をもつ流れの中に伝わる場合を考えてみると，静水領域と流れのある領域における波速はそれぞれ

$$C_0=\sqrt{gL_0/2\pi} \qquad C=\sqrt{gL/2\pi}$$

subscript 0 は静水領域である事。L は波長，g は重力加速度を示す。

これより，　$L_0=2\pi C_0^2/2\pi$　　$L=2\pi C^2/2\pi$

周期Tは両方の領域とも等しいから

$$T=L_0/C_0=L/C+V$$

故に　$C=C_0[1\pm\sqrt{1+4V/C_0}]/2$

深水波に対しては，群速度は波速の 1/2 に等しいから，

$$Gg=C_0[1+\sqrt{1+4V/C_0}]/4+V$$

すなわち，$V=-C_0/4$の時 $Gg=0$ になる。これは，流速の方向が波の進行方向と逆で，初期流速の 1/4 に等しいならば energy は波によって伝達されず，流れに入ると同時に波は砕波する事になる。又，弧立波の波形，位相速度は次式の様に表わされる。

$$\eta=H\mathrm{sech}^2[\sqrt{3H/4h^2}(x-Ct)]$$

$$C=\sqrt{gh}(1+H/h)^{1/2}$$

本来，弧立波は無限波長の長波であるから，理論上，波長を求める事は不可能である。しかし，Munk は周期及び波長を浅水部の進行波について，水深に対してある値以上に限っている。この周期と波長の限界値を有効周期および有効波長といい，次式で表わされる。

$$L_{eff}=2\pi h/M$$

$$T_{eff}=\frac{2\pi}{M}\sqrt{\frac{h}{g}}$$

ここでMはH/h，すなわち，波高と水深の関数である。実験においては，フィルム上で，明らかに波の限界点と思われる，波の両端の所で切ってその点の±x方向の原点からの距離を読みとって波長とした。この波長の波の静水面上の体積はMunk の理論より全体積の90%以上，又 energy の方に関しても90%以上であるから，十分な精度をもって波をとらえているものと思われる。

3 波高変化の一般的特徴

20数例に及ぶ波高変化の実験結果をみると，流速を与えた事による水面変動と整波装置の不完全さによる多少のばらつきはある程度まぬがれたいものとしても，共通した傾向がある事が判かった。すなわち，deep water region から流れのある region に侵入する際，波高は次第に増加し，ある所で peak を示し，そのあと，幾分は振動しながら減衰していく傾向を示している。この振動は波高を補正して水路特性を除けば完全に消去できると考えられる。この様に波高は，一旦増幅し，最大値を示

し，その後減衰していく pattern を取る事が判かった。しかしながら，理論的には未だ増幅してから減衰をする機構を解明したものはない。ただ増幅するもの，減衰するものを個々に取り扱かった論文は種々発表されている。そこで，上記の実験結果を増幅部と減衰部にわけて，理論と実験を比較検討し，理論の適応限界を確かめてみる。

4　増幅部の理論

増幅部における理論としては，先ず富永の理論がある。これは，水の流速Uが深さのみの関数U(y)で表わされ，そのような水の表面をx方向に波が伝播する位相速度Cを求めている。運動，連続の方程式はそれぞれ，

$$u_t+Uu_x+v\frac{dU}{dy}=-\frac{P_x}{\rho}$$

$$v_t+Uv_x=-\frac{P_y}{\rho}$$

$$u_x+v_y=0$$

これからPを消去し，流れ関数Ψを使えば

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\Psi-\frac{d^2U}{dy^2}\Psi_x=0$$

Uがyの一次関数ならば$\nabla^2\Psi=0$なる非回転の波が起こり得る。表面条件を考え，$\Psi=\phi(y)e^{is(x-ct)}$なる解を仮定し，底において$v=-\Psi_x=0$を利用すれば

$$C=-U_0+\frac{hU'_0}{2}\frac{\tanh sh\ sh}{sh}+\left[\frac{g}{s}\left(1+\frac{U_0U'_0}{g}\right)\tanh Sh+hU_0U_0'\frac{\tanh\ sh}{sh}\times\left(1+\frac{hU'}{4U_0}\frac{\tanh\ sh}{sh}\right)\right]^{1/2}$$

無次元量にするため

$$S^*=gS/w^2,\ G=wU_0/g,\ H=w^2h/g$$

$$F^2=U_0U_0'/g$$

とおけば

$$(1+GS^*)^2-\{S^*(1+F^2)+F^2/G\}\tanh HS=0$$

ここで，沖における波の群速度をCg_0，河口に入ってからの水に対する群速度をCg^*とすれば波の energy は空間からみた群速度で伝播していくから，a_0，aをそれぞれ沖および河口に進入してからの波の振巾として

$$a^2(Cg^*-U_0)=a_0^2Cg_0$$

$$C^*=C+U_0$$

$$Cg^*=\frac{C^*}{2}(1+2Sh\ \mathrm{cosech}\ 2Sh)\pm U_0[T(S)-\mathrm{sech}^2Sh/4]+\frac{U_0^2}{8\sqrt{k(s)}}T(S)[\mathrm{sech}^2Sh-T(S)]$$

これらより

$$a^2/a_0^2=Cg_0/(Cg^*-U_0)$$
$$=S^*[(1+GS^*)(1+2HS^*\mathrm{cosech}\ 2HS^*)-2GS^*(1+T(S^*)-\mathrm{sech}^2HS^*/4+G^2S^*T(S)\{\mathrm{sech}^2HS^*-T(S^*)\}/4]^{-1}$$

$$T(S)=\tanh HS^*/HS^*$$

つまり，波の周期，水深，流速の垂直分布がわかれば，無次元量のG，H，F^2が決定され，S^*を求めると，a/a_0すなわち，波高増幅率が求められる。

又，Longuet-Higgins & Stwart は，河口における波高，波数，流速，波速をそれぞそ，a_0, k_0, U_0, C_0とし，任意の点におけるそれぞれの記号をa，k，U，Cとした。波の角速度σは全ての領域で一定であると仮定すると

$$k(C+U)=\sigma=k_0(C_0+U_0)$$

$$\therefore\frac{C^2}{C_0^2}=\frac{k_0}{k}=\frac{C+U}{C_0+U_0}=\frac{1}{1+\gamma}\left(\frac{C}{C_0}+\frac{U}{C_0}\right)$$

ここで　$\gamma=U_0/C_0$

xで微分すると

$$\frac{2C}{C_0^2}\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{1}{1+\gamma}\frac{1}{C_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$x=0$で$C=C_0$だから

$$\frac{C}{C_0}=\frac{1}{2(1+\gamma)}\left\{1+\sqrt{1+\frac{4(1+\gamma)U}{C_0}}\right.$$

前式において，根号内が負になる時は解を持たない。これは波の河口での位相速度の1/4の大きさで逆向きの流速を持つ場合である。又，根号内が零の時

$$C/C_0=1/2(1+\gamma)$$

$$\therefore\frac{U}{C}=\frac{U}{C_0}\cdot\frac{C_0}{C}=-\frac{1}{2}$$

これは流れの速度が群速度C/2の大きさで方向が逆の時はもはや流れに対して wave energy が伝播しない事を意味する。ここで波高の変化について考える。ある面：$x=$const を横切る energy transfor の平均率は

$$\bar{R}_x=E(Cg+U)+S_xU+\frac{3}{2}EU^2/C+\frac{1}{2}\rho hU^3$$

ここでEは unit horizontal area あたりの wave energy を表わす。non uniforn stream における波において，plane $x=0$と$x=$const の間で wave energy の reflextiovc がないので

$$\bar{R}x=\bar{R}_0=\mathrm{const}$$

そこで，$\frac{\partial}{\partial x}\bar{R}x=0$

それ故　$\frac{\partial}{\partial x}[E(Cg+U)]+S_x\frac{\partial U}{\partial x}=0$

deep water において

$$Cg=\frac{1}{2}C\qquad S_x=\frac{1}{2}E$$

であるから　$\frac{\partial}{\partial x}[E(\frac{1}{2}C+U)]+\frac{1}{2}E\frac{\partial U}{\partial x}=0$

$x=0$において微分すると，$U=\partial C$を用いて

$$\frac{\partial E}{\partial x}=[\frac{1}{2}C(1+2\gamma)]+E\left[\frac{1}{2(1+2\gamma)}+\frac{3}{2}\right]\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

故に　$\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial x}\right)x=0=-\frac{4+6\gamma}{(1+2\gamma)^2}\frac{1}{C}\frac{\partial U}{\partial x}$

あるいはEはa^2（波高の二乗）に比例するから

$$\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)_{x=0}=-\frac{(2+3\gamma)}{(1+2\gamma)^2}\frac{1}{C}\frac{\partial U}{\partial x}$$

又 $E\left(\frac{1}{2}C+U\right)C=\text{const}$

$$\frac{E}{E^0}=\frac{C_0(C_0+2U_2)}{C(C+2U)}$$

Eはa^2に比例するから

$$\frac{a}{a_0}=\left[\frac{Co(C_0+2U_0)}{C(C+2U)}\right]^{1/2}$$

これより，波高の増幅率を求める事ができる。

5 減衰部の理論

波高のかなり大きな波については，摩擦による波の減衰についての問題を数学的に取り扱う事は一般に困難である。しかし，特に孤立波については Keulegan による理論計算がなされている。孤立波は形式上の各点の伝播速度が等しいので，伝播とともに波形そのものの分散による変形は生じないが，しかし摩擦のために波高は低減していく。Keulegan は摩擦の影響を専ら，水底に沿う層流境界層内における energy 損失によるものと仮定し，波の energy の変化に従って波高の変化を層流境界層内での剪断抵抗のために失われる energy を計算する事によって求める。単位幅あたりの energy の消散率は次の様になる。

$$\frac{dE_1}{dt}=-\frac{4\mu A^2}{\sqrt{\pi}K}\sqrt{\frac{Kw}{U}}\int_{-\infty}^{\infty}Y(n)\mathrm{sech}^2 ndn$$

ここで $n=0.1$ を与えると$N\fallingdotseq\frac{1}{\pi}$，又$K=\frac{1}{H}\sqrt{\frac{3k_1}{4H}}$

$A=wh_1/H_1,\quad w=\sqrt{gH}$

これらを与えると，上式は次の様になる。

$$\frac{dE_1}{dt}=4\pi^{-3/2}(4/3)^{1/4}\rho U^{1/2}g^{5/4}h^{7/4}$$

単位幅に対する孤立波の energy は

$$E_2=\frac{8\rho}{3\sqrt{3}}g(Hh_1)^{3/2}$$

波の energy の減少率に対して次の事がいえる。

$$\frac{dE_2}{dt}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\rho g^{3/2}H^2h_1^{1/2}\frac{dh_1}{dS}$$

$$\left(\frac{h_1}{H}\right)^{-5/4}d\left(\frac{h_1}{H}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{2H}{B}\right)\sqrt{\frac{U}{g^{1/2}H^{3/2}}}d\left(\frac{S}{H}\right)-0$$

これを積分し，最初の wave height を，h_0，によって与えると，$\left(\frac{h^1}{H}\right)^{-1/4}-\left(\frac{h_0{}^2}{H}\right)^{-1/4}=K\frac{S}{H}$

ここでKは減衰係数で次の様な値を示す。

$$K=\frac{1}{12}\left(1+\frac{2H}{B}\right)\sqrt{\frac{\upsilon}{g^{1/2}H^{3/2}}}$$

h_{01} ：初めの波高

h ：距離xを伝播した後の波高

B ：水路幅

υ ：水の動粘性係数

g ：重力加速度

H ：自由水面の水深

又，Horikawa は bottom friction による energy 消散の式を数値解法で求めた。

$$\frac{dx}{T\sqrt{gh}}=d\left(\frac{H}{h}\right)\left[0.0374\beta\left(\frac{H}{h}\right)^3\left(1+\frac{H}{h}\right)^{-1/2}F\left(\frac{H}{h}\right)+0.772C_fT\sqrt{gh}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left(1+\frac{H}{h}\right)^{-1/2}\varphi\left(\frac{H}{h}\right)\right]^{-1}$$

ここで

$$F\left(\frac{H}{h}\right)=1+3.99\left(\frac{H}{h}\right)+7.27\left(\frac{H}{h}\right)^2+7.65\left(\frac{H}{h}\right)^3+8.60\left(\frac{H}{h}\right)^2+2.08\left(\frac{H}{h}\right)^5\ \varphi\left(\frac{H}{h}\right)=1-1.08\left(\frac{H}{h}\right)+1.26\left(\frac{H}{h}\right)^2-0.463\left(\frac{H}{h}\right)^3$$

6 実験結果及び考察

6・1 実験領域

実験によって得られた a/a_0 と，Yi-Yuan-Yu の理論曲線を書いたものが図6—1である。黒く塗りつぶした点が（Ⅳ）実験値，白く抜いた点は（Ⅱ）実験値である。図をみると，どの点も理論曲線に完全には近似していないが$-C_0/U$ の値は全部4と7の間に入っている。これは，実験値が部分的砕波領域に入っている事を意味している。又，各点から矢印で示してある数値は L_0/H_0 の値を示している。この L_0/H_0 は砕波に対する限界値でその値は横軸の下側に示している。それらの数値を比較してみると，実験に用いた孤立波は波高比の大きなものを除いて，かなり不安定な波である事がわかる。

6・2 増幅部

実験によって得られた a/a_0 と Tominaga の理論曲線を示したのが図6—2である。図をみると，白く抜いた点，実験（Ⅱ）は理論曲線に非常によく適合しているが，黒点の実験（Ⅳ）は，理論値よりかなり少ない値をとっている。これは，部分的砕波領域でも完全砕波に近いためと思われる。又 Longuet-Higgins の理論曲線と実験値を比較したのが図6—3である。両実験値共，理論よりかなり小さな値をとっている。これは部分的砕波領域では U/C_0 が大きい値をとるので理論値より小さくなるのであろう。図6—2より a/a_0 は1.0～1.39であり，一方，理論値のそれは実験値に比較してかなり大きな値をとっている事がわかる。これは理論が deep water に基づいているために，限界値 $U/C_0=-0.25$ で，a/a_0 が無限大になるためであり，実際にはそれ以前に砕波が生じるものと思われる。しかし孤立波による実験では $U/C_0=-0.25$以上でも極めて安定した波が得られたので，

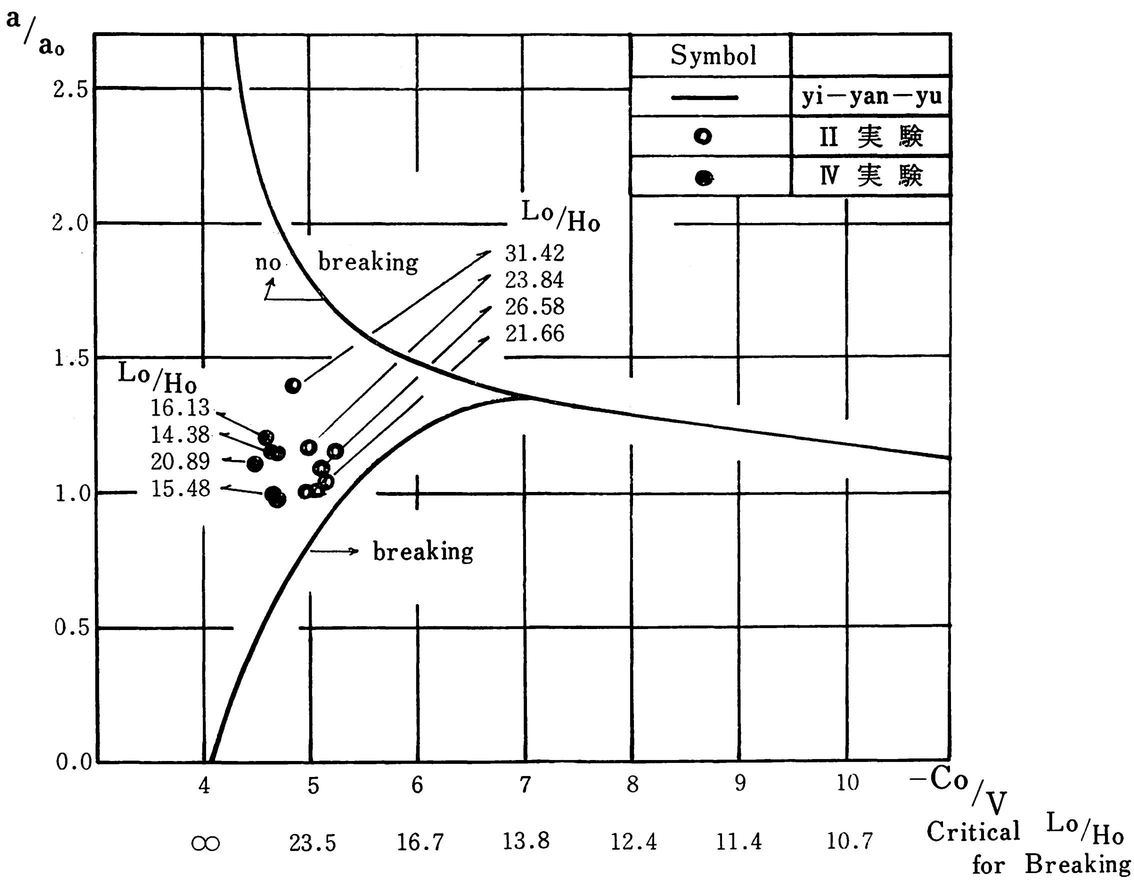
a/a0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Symbol
yi－yan－yu
II 実 験
IV 実 験
Lo/Ho
31.42
23.84
26.58
21.66
no breaking
Lo/Ho
16.13
14.38
20.89
15.48
breaking
4
5
6
7
8
9
10
－Co/V
∞
23.5
16.7
13.8
12.4
11.4
10.7
Critical Lo/Ho
for Breaking

図6－1

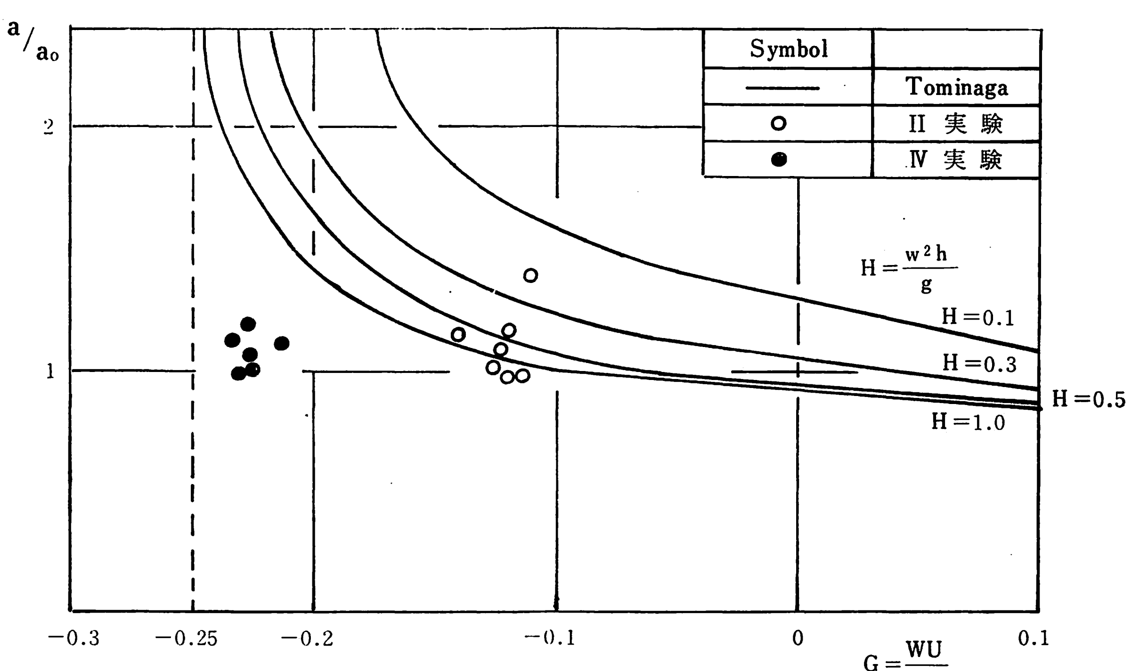
a/a0
2
1
Symbol
Tominaga
II 実 験
IV 実 験
H＝w²h/g
H＝0.1
H＝0.3
H＝0.5
H＝1.0
－0.3
－0.25
－0.2
－0.1
0
0.1
G＝WU/g

図6－2

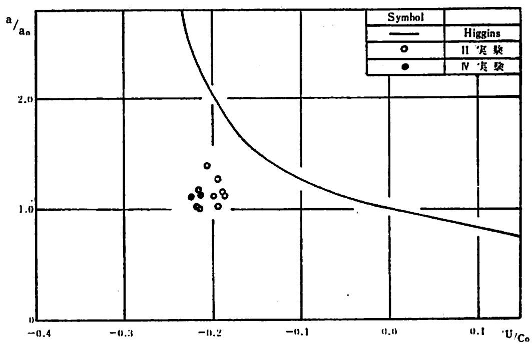

図6—3

deep water 限界をこえた新しい考え方が必要になる。そこで a/a_0 と U/C_0 で plot したのが，図6—4である。

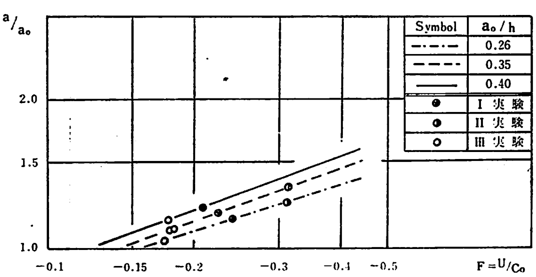

図6—4

これから

$$\log (a/a_0)=n \log (U/C_0)+\log A$$

すなわち $a/a_0=A (U/C_0)^n$

図より $n=1/3$ であるから

$$a/a_0=A (U/C_0)^{1/3}$$

A については，図6—4からわかるように a_0/h の値が等しくても必ずしも同じ値にならない。これはフィルムから読んだ a_0 の値の誤差によるものかもしれない。そうでない場合は A が a_0/h に関する function になるという事である。これには現在の data だけでは不十分で，今後更に研究する必要がある。いずれにしても，増幅部においては，Tominaga の理論が Longuet-Higgins の理論より，孤立波において適応性が大きいようである。

6.3　減衰部

波高の減衰は水底に沿う層流境界層内の剪断抵抗と流れの energy の合成により生ずるものと思われる。そのうち，剪断抵抗による波高低減の割合は

$$\left(\frac{a}{h}\right)^{-1/4}-\left(\frac{a_0}{h}\right)^{-1/4}=k\frac{x}{h}$$

ただし　$k=\frac{1}{12}\left(1+\frac{2h}{B}\right)\sqrt{\frac{\upsilon}{g^{1/2}h^{3/2}}}$　・・・減衰係数

剪断力だけによる減衰係数を k とし，剪断力と流れ，双方の影響の合わさったものを，k^1 とすると，k^1/k は約7～20の値になった。これは流れの影響が非常に卓越しているものと考えられるので，

$$\frac{k'}{k}\propto\left(\frac{U^2}{gh}\right)^n$$

と考えて，n の値を実験値より求めてみた。その結果 $x≒1.0$が得られた。それ故，k^1/k は流れのenergy に一次に比例する事が判かる。

又，Horikawa は battom friction に energy 消散の式を数値解法によって解き，乱流減衰に関する理論を表わした。ここで乱流減衰係 $\beta=5$，底部摩擦係 C_f $C_f\sqrt{g/h}$

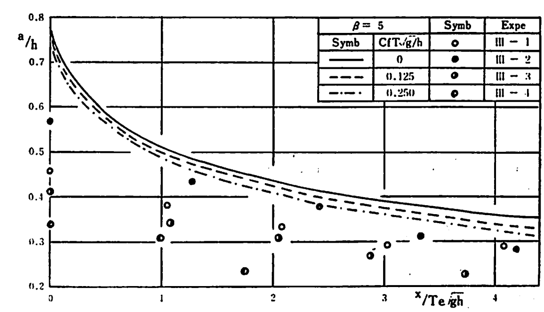

図6—5

=0，0.0125，0.025の場合の理論曲線を求めたのが図6—5である。この図に，実験(Ⅲ)の結果を，plot した。図より，波高の大きな No 12—1 は理論値にかなり近付く様であるが一般に理論値に比べて小さい値を示している。この事について，新たに，β，C_f の値を変えて理論曲線を求めてみた。これが図6—6である。乱流減衰係数 β の大きい理論曲線にはこれらの点は非常に近付く筈である。この事は実験における孤立波が減衰率の大きな波であった事と良く適合している。一般に rough boundary layer では C_f は0.05～0.1位と考えられるので，この理論は β 以外に C_f をどの位に評価するかが今後の問題である。

これまで，減衰に関して Keulegan，Horikawa 等の理論で考察を進めて来た所，Keulegan の層流境界層の剪断力による減衰は，実験のそれと比較したら，one order の差があった。又，Harikawa による乱流減衰の理論と比較しても未だ若干の差がある。この差は理論の仮定に問題があると考えられるので，ここに上昇気泡によって誘導される水平流の考えに教えられ，渦動粘性に新たな考慮を加えて実験値と比較した所，かなりよい結果を得た。

一般に，静水において波長λ の波は，

$C^2=g/k$，　$k=2\pi/\lambda$　　C=wave velocity

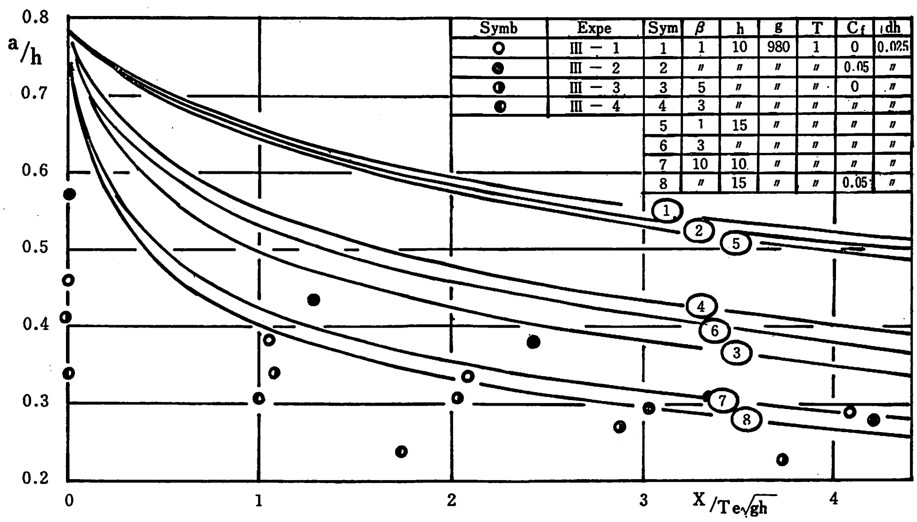

図６—６

又，この波が流速Ｕで流れている領域に侵入した場合，波を $e^{i(\sigma t-kx)}$ で表わせば

$$(\sigma/k-U)^2=g/k$$

$$\therefore k=(g+2\sigma U-g\sqrt{1+4U\sigma/g})/2U^2$$

静水の場合の量に subscript “O” を付けると

$$\sigma^2=k_0g \qquad C_0{}^2=g/k_0 \qquad \sigma C_0=g$$

ここで波が流れを遡上する場合を考えて，n を正数とすると　$C_0/U=-n$

$$k/k_0=n^2\,(1-2/n-\sqrt{1-4/n})/2$$

ここで $n<4$ の時 k/k_0 は複素数となり，しかもその虚数部は負であり，従って波動 $e^{i(\sigma t-kx)}$ には減衰要素が入る。その減衰係数は $-ki=n^2\sqrt{4/n-1}/2$ で与えられる。

ここで渦動粘性を考慮してみる。今，渦擾速度を，αU 混合距離を β/k とすると渦動粘性 υ は

$$\upsilon=\alpha\beta U/k=\frac{1}{15}\sqrt{\frac{\sigma}{8}}\,kh \qquad h：水深$$

ここで　$\gamma=0.015$

粘性の作用を表わす parameter を a とすると，a は k の虚数部 ki によって示される。種々の n と a の値に対して行なった理論計算の結果は図６—７に示してある。又，実験によって得られた減衰係数の値は図６—８から $k=0.086$ となり，上述の理論からは $k=0.091$ を得た。故にこの理論の適合性がかなり高い事がわかる。結果として減衰部では $H/H_{max}=e^{-0.09x}$ である事が判かった。

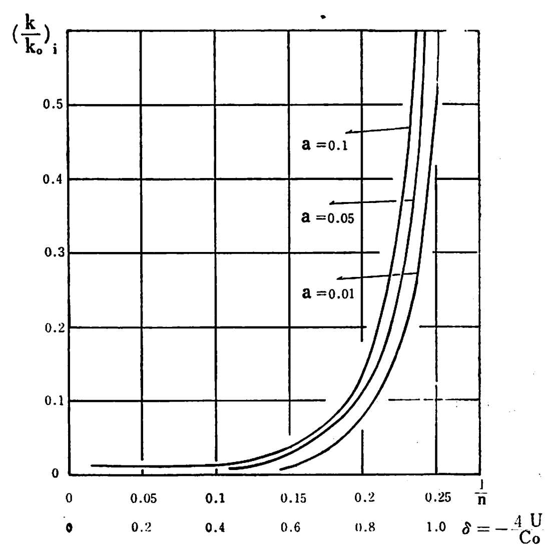

図６—７

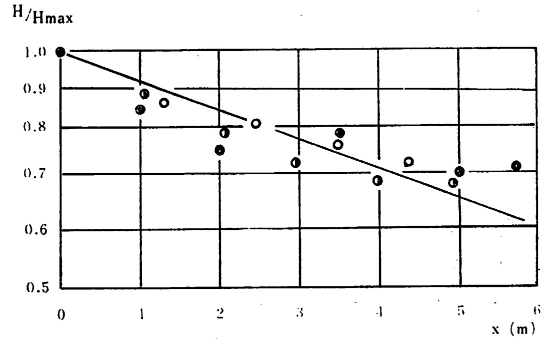

図６—８