

鋳物用金型の熱応力について (第2報)

— 種々な断面形状の場合 —

福田 浩・保坂 新英

Thermal Stress in Metallic Mold (2nd Report)

— Various sectional shapes —

Hiroshi FUKUDA and Shinei HOSAKA

(昭和47年10月31日受理)

1. 緒 言

鋳物用金型部材内に発生する熱応力について、前報告で鋳型比の異なる三つの中空円筒形金型の場合の結果を発表した。

本報告では、鋳型の断面形状が中空円筒形以外の場合を実験の対象とすることを試み、その断面形状として、正三角形、正方形および長方形を選んだ。

そして、それぞれの金型について、平板部中央面および隅部における発生熱応力を求めこれら隅部をもつ金型では、隅部形状および寸法の差異により金型全体の熱応力値に大きな影響を与えることが明らかになったので、その結果のいくつかを報告する。

2. 実験の理論

実験の結果を解析する手段について、円筒形金型の場合は前報で詳述したので、ここでは、それ以外の形状金型に適用する平板の熱応力および熱衝撃について述べる。

前提条件として、つぎの仮定をおく。

- (1) 物理定数は温度によらず一定である。
- (2) 板および円筒の温度分布は、それぞれ厚さ方向、半径方向にのみ変化する。
- (3) 外力は作用しない。

図-1のように板厚方向の温度分布を $\theta(z)$ とし、こ

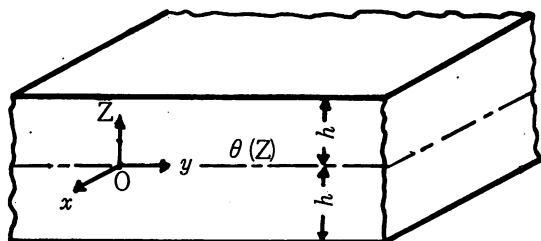


図 1

昭和48年2月

れは x, y 面方向には一様であるとする。

板面加熱によって熱膨張と、それに伴う熱応力のために、板の中央面に ϵ_0 の歪と曲率 $1/\rho$ の曲がりを生じたものとすれば、温度 θ の任意点 (x, y, z) における熱膨張歪はすべての方向に対して $\beta\theta$ であるので、熱応力に対応する弾性歪は

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_0 + z/\rho - \beta\theta \dots\dots\dots(1)$$

となり、したがって x, y 方向の熱応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ &= \frac{E}{1-\nu} (\epsilon_0 + z/\rho - \beta\theta) \\ \sigma_y &= \sigma_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

となる。

いま、板の周辺を自由とすれば、つり合上

$$\int_{-h}^h \sigma_x dz = 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_x \cdot z dz = 0 \dots\dots(3)$$

が成り立つべきで、これに(2)式を代入して計算すれば

$$\epsilon_0 = \frac{\beta}{h} \int_{-h}^h \theta dz = \beta\theta_m \dots\dots\dots(4)$$

および

$$\frac{1}{\rho} = \frac{12\beta}{h^3} \int_{-h}^h \theta \cdot z dz \dots\dots\dots(5)$$

を得る。

式(4), (5)を(2)式に代入すれば、所要の熱応力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \frac{E\beta}{1-\nu} \left\{ -\theta + \frac{1}{h} \int_{-h}^h \theta dz \right. \\ &\quad \left. + \frac{12z}{h^3} \int_{-h}^h \theta z dz \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

となる。

温度分布 $\theta(z)$ が板中央面に対して対称の場合には

$$\int_{-h}^h \theta z dz = 0, \text{ すなわち } \frac{1}{\rho} = 0$$

となるから、熱応力は

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\beta}{1-\nu} (\theta_m - \theta) \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる。

ただし、以上の式は近似式であって、特に板の自由縁近傍では厳密な応力分布を知ることはできない。

しかし、物体に作用する外力の有様を変えても、外力の合成が不変ならば、力の作用点からややはなれた場所の応力状態はほとんど変わらないという Saint Venant の原理からすれば、板の縁辺からややはなれた大部分では以上の熱応力式でも十分な結果を与えると考えて差支えない。

非定常時（本研究では注湯後15秒までの間）の熱応力の解析法は、図-1の板内部任意点における熱伝導の方程式は

$$\rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \dots\dots\dots (8)$$

で与えられ、板の両表面 $z = \pm h$ における熱伝達の条件式は、 $z = \pm h$ において

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} = \pm \alpha (\theta_0 - \theta) \dots\dots\dots (9)$$

となる。右辺の複号は $z = \pm h$ の複号に対応する。問題に対する初期条件は、座標 z に無関係に

$$t = 0 \text{ で } \theta = 0 \dots\dots\dots (10)$$

であり、また境界条件として板厚方向の対称性により、時間 t に無関係に

$$z = 0 \text{ で } \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

が成り立つべきである。

温度 θ は座標 z および時間 t の関数であるから、これを

$$\theta = F_1(z) \cdot F_2(t)$$

とおいて(8)式に代入すれば、

$$\rho C_p F_1 \cdot F_2' = \lambda F_1'' \cdot F_2$$

となる。これより

$$\frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{F_2'}{F_2} = \frac{F_1''}{F_1} = -k^2$$

とおけるから

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} + k^2 F_1 = 0$$

その解として

$$F_1 = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$$

および

$$\frac{dF_2}{dt} + \frac{\lambda}{\rho C_p} k^2 F_2 = 0$$

その解として

$$F_2 = C_3 \exp \left(-\frac{\lambda}{\rho C_p} k^2 t \right) = 0$$

したがって(8)式の解は

$$\theta = (A \cos kz + B \sin kz) \cdot \exp \left(-\frac{\lambda}{\rho C_p} k^2 t \right)$$

の形となる。これに条件式(11)を用いると、 $B = 0$ を得る。したがって $k = 0$ の場合の解をも考慮に入れて

$$\theta = A \cos kz \cdot \exp \left(-\frac{\lambda}{\rho C_p} k^2 t \right) + C \dots (12)$$

とおき、これも表面の熱伝達条件式(9)に代入すれば

$$\begin{aligned} -A k \sin kh \cdot \exp \left(-\frac{\lambda}{\rho C_p} k^2 t \right) \\ = \frac{\alpha}{\lambda} \left\{ \theta_0 - C - A \cos kh \cdot \exp \left(-\frac{\lambda}{\rho C_p} k^2 t \right) \right\} \end{aligned}$$

となる。この式は任意の時刻 t で成り立つべきであるから、そのためには

$$C = \theta_0 \text{ および } k \sin kh = \frac{\alpha}{\lambda} \cos kh$$

とならなければならない。このうち、後者の条件式は $kh = p$ とおくと

$$p = \frac{h\alpha}{\lambda} \cot p \text{ または } p = Bi \cot p \dots\dots\dots (13)$$

で示される固有方程式となる。ただし $Bi = h\alpha/\lambda$ を表はし、 Bi は熱伝達率 α に比例する無次元の係数であって、Biot の係数と云われるものである。

式(13)を満足する根、すなわち固有値 $p = p_n$ は無数にあるから、それらの根 $p_n = k_n h$ に対する(12)式の解を総合して

$$\theta = \theta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(p_n \frac{z}{h} \right) \cdot \exp \left(-p_n^2 \frac{\lambda}{\rho C_p h^2} \cdot t \right) \dots\dots (14)$$

において、これに初期条件式(10)を用いると

$$\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(p_n \frac{z}{h} \right)$$

を得る。ゆえに、(14)式の解が(10)式を満足できるためには

$$a_n = \frac{\theta_0 \int_0^h \cos \left(p_n \frac{z}{h} \right) dz}{\int_0^h \cos^2 \left(p_n \frac{z}{h} \right) dz}$$

$$= \frac{2\theta_0 \sin p_n}{p_n + \sin p_n \cos p_n}$$

とおけばよい。これを(14)式に代入すれば

$$\theta = \theta_0 \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n \cos \left(p_n \frac{z}{h} \right) \cdot \exp \left(- p_n^2 \frac{\lambda}{\rho c_p h^2} \cdot t \right)}{p_n + \sin p_n \cos p_n} \right\} \dots (15)$$

が得られ、これが任意時刻における温度分布を与える式である。これに対応して発生する熱応力は、前掲(7)式で与えられる。これを後の計算の便宜上、つぎの形に変形しておく。

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma = \frac{E\alpha}{1-\nu} \theta_0 \sigma^*$$

ただし $\sigma^* = \frac{\theta_m - \theta}{\theta_0} = \frac{(1-\nu)\sigma}{E\alpha\theta_0}$ (16)

ここに θ_0 は板の初温と媒質との温度差であり、 σ^* は実際の発生応力 σ と温度変化 θ_0 による自由膨脹を完全に拘束するとき発生すべき熱応力 $E\alpha\theta_0/(1-\nu)$ との比ですなわち、 σ^* はこの応力を基準に無次元化した熱応力である。

(15)式より、任意時刻における板の横断面の平均温度は

$$\theta_m = \frac{1}{h} \int_0^h \theta dz$$

$$= \theta_0 \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p_n \cdot \exp \left(- p_n^2 \frac{\lambda}{\rho c_p h^2} \cdot t \right)}{p_n (p_n + \sin p_n \cos p_n)} \right\} \dots (17)$$

で与えられる。これを(16)式に代入して無次元熱応力 σ^* を計算すれば

$$\sigma^* = \frac{\theta_m - \theta}{\theta_0}$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin p_n \left\{ p_n \cos \left(p_n \frac{z}{h} \right) - \sin p_n \right\}}{p_n (p_n + \sin p_n \cos p_n)} \cdot \exp \left(- p_n^2 \frac{\lambda}{\rho c_p h^2} \cdot t \right) \dots (18)$$

を得る。これが非定常熱応力を与える一般式で、これにより板の表面の応力(各瞬間において板に生ずる応力の絶対値の最大を与える)は $z = \pm h$ において

$$(\sigma^*)_{z=\pm h} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-p_n^2/Bi) \sin^2 p_n}{p_n (p_n + \sin p_n \cos p_n)} \cdot \exp(-p_n \cdot t^*) \dots (19)$$

となる。また板の中央面 $z = 0$ における応力は

$$(\sigma^*)_{z=0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin p_n (p_n - \sin p_n)}{p_n (p_n + \sin p_n \cos p_n)} \cdot \exp(-p_n^2 \cdot t^*) \dots (20)$$

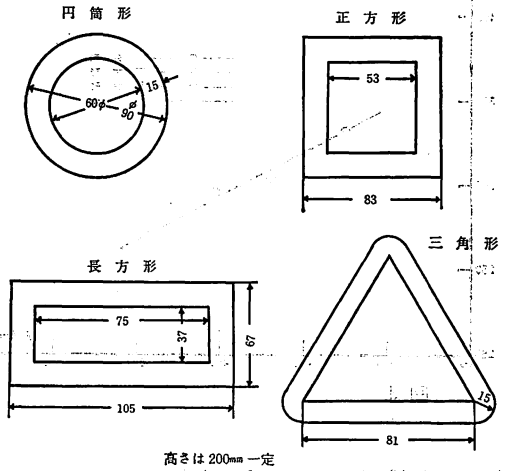


図 2

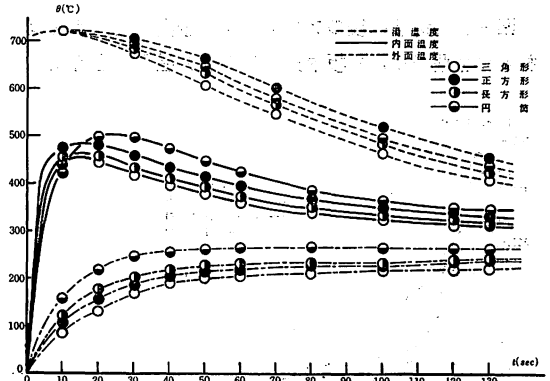


図 3

となる。ただし $t^* = (\lambda/\rho c_p h^2) t$ で無次元化時間である。実際上記(18)~(20)式によって所要の熱応力の値を計算するためには、Biot の係数の種々の値に対して、固有方程式(18)の根を求めておく必要があるが、その数値表は既に多くの文献に記載されている。

本研究の場合については、(19)式から計算した平板および円筒金型の表面部の無次元応力と Biot 数および無次元時間の関係を求め解析した。

3. 実験の装置と方法

本実験では、金型の断面形状が異なるだけで、実験の装置と方法については前報告と同様なので省略する。

使用した金型の形状および寸法を図-2に示した。

これら金型にアルミニウムを溶解して注湯し、アルメル・クロメル熱電対で各部の温度を測定記録し、前節で

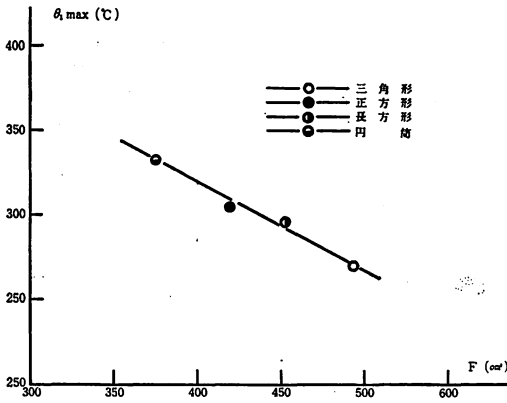


図 4

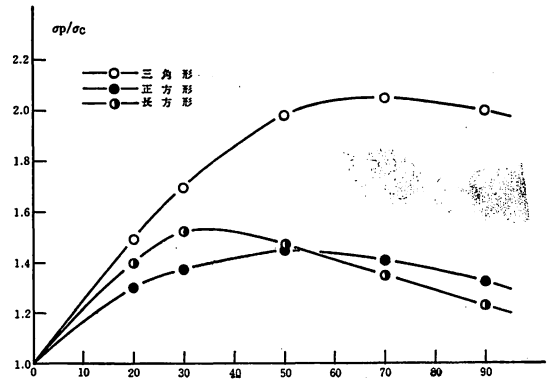


図 7

詳述した解析方法によって発生応力を求めた。

4. 実験の結果と考察

図一三に鑄込み後のアルミニウムと金型の内外面（隅部をもつ金型では、平板中央部内外面）温度の経時変化を

示した。

この結果から、金型の内面最高温度値は、円筒形、正方形、長方形、三角形の順に高くなっている。

なお、内面最高温度の発生時刻は、金型形状によるちがいは見られず、いずれのものも鑄込み後15~20秒間にある。

一般に、鑄型比 K （鑄型の体積 / 鑄物の体積）の増加とともに、内面最高温度が減少することは M. N. Srinivasan らの実験や、前報での実験結果から明らかであるが、本実験の結果からは、必ずしもそのような断定はできないことがわかる。

ちなみに、本実験に供した金型と溶解アルミとの接触面積に対する内面最高温度との関係を求めると、図一四に示すようになる。

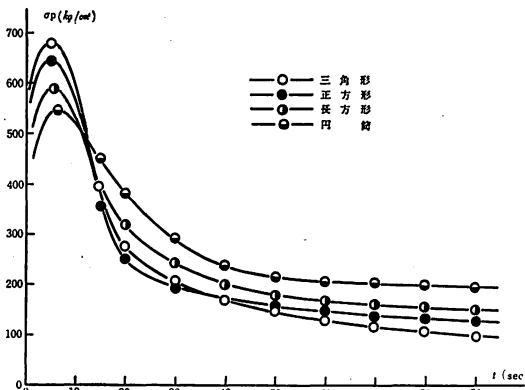


図 5

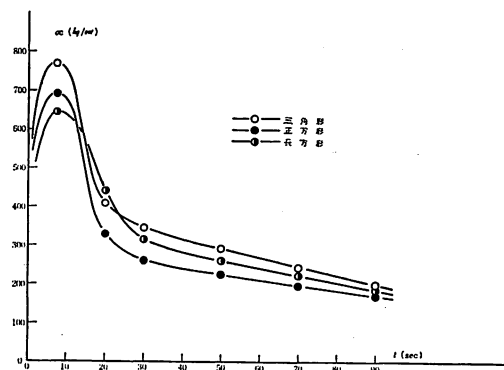


図 6

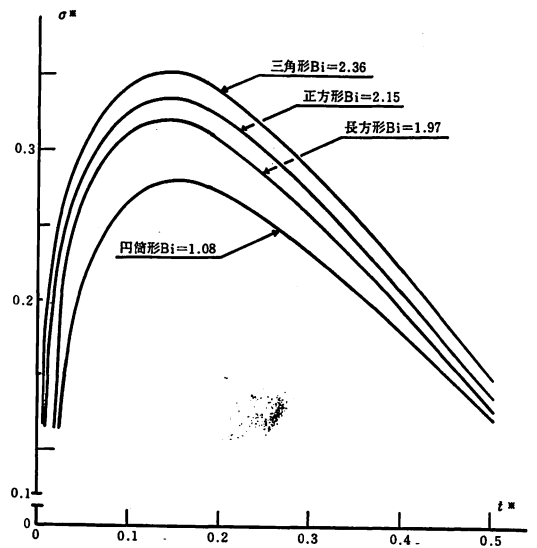


図 8

この結果から、金型厚さが異っても、その形状が同じ場合には、内面最高温度の示す傾向は鋳型比によって決定づけられるが、金型厚さが一定で、しかも鋳物体積が一定である本実験のような場合には、その傾向は鋳型比すなわち、鋳物の熱容量の多少にはよらず、鋳物との接触面積、つまりは伝熱面積の大小に関係することがわかる。

金型部材内に生ずる熱応力は、一義的に金型内外面温度差によって決まるので、各形状金型の平板面中央部と隅部の加熱側表面応力(各瞬間における最大熱応力)を前述の解析法により求めた結果を図示すると図-5と6に示すようになる。

また、以上二箇所の熱応力値の比をとり、その経時変化を示すと図-7に示すようになる。

これらの結果から、隅部の応力は平板部のそれよりも大きく、金型形状の相違によるその度合の経時変化はそれぞれ傾向を異にする。

なお、円筒型金型に比し、隅部をもつ金型の平板部の熱応力の最大値はいづれも大きい、時間の経過につれて途中で逆転している。

とくに、三角形金型の変化の度合は大きく、正方形および長方形金型は三角形と円筒形金型との間にある。

また、同じ隅部をもつ金型でも、その数、形状(角度値)が異なると応力値は大きなちがいを生じ、その経時変化の様相も大きな差異がみとめられる。

以上のような結果は、結局は円筒形の場合とはちがいが、隅部をもつ金型ではその形状の相異に応じた伝熱の不均衡が生じ、金型全体として不均一な部分的熱応力の発生することを意味している。

具体的には、隅部をもつ金型の場合、その数と寸法、形状(角度値)および、平板部との関連などが、金型全体としての発生熱応力に大きな影響をおよぼし合うことが容易に想定できる。

これらの点を考慮して得られた結果については、次報にゆづることとする。

図-8には、注湯直後のきわめて急激に発生熱応力の変化する、いわゆる非定常熱応力の問題として平板部について解析し、最大熱応力の無次元化した値の経時変化を示した。パラメータは金型形状により異なる熱伝達係数の無次元化した数値、Biot 数である。

5. 結 言

隅部をもつ金型の発生熱応力を求めた結果の中から主なものをまとめると、つぎのようである。

(1) 鋳型比が同一でも、金型形状が異なると金型内面

温度の最高値の示す傾向は一樣にはならない。

(2) 円筒形金型に比し、隅部をもつ金型では発生熱応力の示す傾向にその形状による大きな差異が認められる。

(3) 隅部をもつ金型は全体として不均一な熱応力分布を示し、その形状に応じて複雑となる。

6. 記 号

α	: 温度伝導率 m^2/h
Bi	: Biot 数
C	: 定 数
C_p	: 比 熱 $Kcal/kg/^\circ C$
E	: 縦弾性係数 kg/m^2
F	: 面 積 m^2, cm^2
h	: 厚 さ m
K	: 鋳 型 比
k	: 定 数
p	: 方程式の根
t	: 時 間 $hr, sec.$
t^*	: 無次元化時間
α	: 熱伝達率 $Kcal/m^2h^\circ C$
β	: 線膨張係数 $^\circ C^{-1}$
δ	: 比重量 kg/m^3
σ	: 応力値 kg/m^2
σ^*	: 無次元化応力
λ	: 熱伝導率 $Kcal/mh^\circ C$
θ	: 温 度 $^\circ C$
ρ	: 密 度
ϵ	: 弾 性 歪
ν	: ポアソン比

7. 添 字

0	: 初 温
1	: 内 面
2	: 外 面
P	: 平 面 部
C	: 隅 部
m	: 平 均 値
x, y, z,	: 座 標 軸

参 考 文 献

- 1) 福田 浩, 秋田工業高等専門学校研究紀要, 7, 27, (1972)
- 2) 小泉 堯, 日本機械学会誌, 68, 562, 1629, (1965)

3) // 同上論文集, 28, 194, 1314, (1962)

5) 鵜戸口英善 内燃機関 6, 58, 59, 60, 53, 57,

4) M. N. Srinivasan 他, Trans. A. F. S

57, (1967)

67, 449, (1959)